Departamento de Ciência da Computação ICEx/UFMG
Matemática Discreta $2^{\underline{o}}$ semestre de 2005
Professor: Newton José Vieira
Segunda Lista de Exercícios/Solução do professor

Combinatória Elementar

1. (a) $8!$.
   (b) $C(8,3)5!$.
   (c) $C(3-1+3,3)3!5!$.
   (d) $P(6,0)2!7!+P(6,1)2!6!+P(6,2)2!5! = 2!7!+6.2!6!+6.5.2!5! = (7+6+5)2!6!$.
2. (a) $P(15;3,3,3,3,1,1,1) = 15!/(3!3!3!3!)$.
   (b) $P(13;3,3,3,1,1,1,1) = 13!/(3!3!3!)$.
   (c) $C(4-1+10,10)P(12;3,3,3,1,1,1) = C(13,10)12!/(3!3!3!)$.
3. $C(26,6)+C(26,1)C(25,4)+C(26,2)C(24,2)+C(26,3)C(23,0)$
4. (a) $C(7-1+20,20)$.
   (b) $C(7-1+13,13)$.
5. (a) $C(8,4)C(15,6)$.
   (b) $\sum_{k=4}^{8} C(8,k)C(15,10-k)$.
   (c) $\sum_{k=5}^{8} C(8,k)C(15,10-k)$.
6. $C(15;5,5,5)/3! = 15!/(5!5!5!3!)$.
7. $10^6 - 9^6$.
8. $C(6,3)/6^3$.
9. O número de escolhas das v caixas vazias é $C(n,v)$. Descontando-se $n-v$ bolas obrigatoriamente colocadas nas $n-v$ caixas não vazias, resta então distribuir $r-(n-v)$ bolas idênticas em $n-v$ caixas, o que pode ser feito de $C((n-v)-1+(r-n+v), r-n+v)$ maneiras. Aplicando-se a regra do produto, tem-se a resposta: $C(n,v)C(r-1,r-n+v)$.
10. (a) $C(50,25)/2^{50}$.
    (b) $\sum_{k=25}^{50} C(50,k)/2^{50}$.
11. Pegue uma seqüência qualquer de r números consecutivos iniciando no número $n+1$: $n+1$, $n+2$, …, $n+r$. Como $P(n+r,r) = (n+r).(n+r-1)\cdots(n+1)$ e $C(n+r,r) = P(n,r)/r!$, segue-se que $(n+1).(n+2)\cdots(n+r)$ é divisível por $r!$. Como $n+1$, $n+2$, …, $n+r$ é uma seqüência arbitária de r números consecutivos, conclui-se que o produto de quaisquer r número naturais consecutivos é divisível por $r!$.

12. (a) $C(5-1+15, 15)$.
    (b) O número soluções para: $(y_1-3)+\cdots+(y_5-3)=15$ com $y_k \geq 0$, ou seja, o número de soluções para: $y_1+\cdots+y_5=30$ com $y_k \geq 0$. Resposta: $C(5-1+30, 30)$.
    (c) O número soluções para: $(y_1+2)+(y_2+4)+(y_3+6)+(y_4+8)+(y_5+10)=15$ com $y_k \geq 0$, ou seja, o número de soluções para: $y_1+\cdots+y_5=-15$ com $y_k \geq 0$. Resposta: 0.
13. O número de soluções para $x_1+x_2+x_3=5$ com $x_k \geq 0$ é $C(3-1+5, 5)$. O número de soluções para $5+x_4+x_5=20$ é $C(2-1+15, 15)$. Logo, a resposta é: $C(3-1+5, 5)C(2-1+15, 15)$.
14. $C(30, 10)2^{20}(-3)^{10}$.
15. $C(21; 10, 0, 1, 10) = 21!/(10!10!)$.
16. A prova será feita por indução sobre n. Para $n=r$, tem-se: $C(r+1, r+1)=1=C(r, r)$. Suponha, como hipótese de indução, que $C(n+1, r+1)=\sum_{k=r}^{n} C(k, r)$, para certo $n \geq r$. Tem-se:
    $$\begin{array}{rcll} \sum_{k=r}^{n+1} C(k,r) & = & \sum_{k=r}^{n} C(k,r) + C(n+1,r) & \text{pela definição de somatória} \\ & = & C(n+1,r+1) + C(n+1,r) & \text{pela hipótese de indução} \\ & = & C(n+2,r+1) & \text{pela identidade de Pascal} \end{array}$$
17. (a) $C(2n, n) = \sum_{k=0}^{n} C(n, k)^2$.
    Sejam A e B dois conjuntos disjuntos de tamanho n. $C(2n, n)$ é o número de subconjuntos de tamanho n de $A \cup B$. E:
    - $C(n, 0)^2 = C(n, 0)C(n, n)$ é o número de subconjuntos de tamanho n de $A \cup B$, com 0 elementos de A e n elementos de B;
    - $C(n, 1)^2 = C(n, 1)C(n, n-1)$ é o número de subconjuntos de tamanho n de $A \cup B$, com 1 elemento de A e $n-1$ elementos de B;
    - $\vdots$
    - $C(n, n)^2 = C(n, n)C(n, 0)$ é o número de subconjuntos de tamanho n de $A \cup B$, com n elementos de A e 0 elementos de B.
    (b) $C(m+n, r) = \sum_{k=0}^{r} C(m, k)C(n, r-k)$.
    Sejam A e B dois conjuntos disjuntos, A de tamanho m e B de tamanho n. $C(m+n, r)$ é o número de subconjuntos de tamanho r de $A \cup B$. E:
    - $C(m, 0)C(n, r)$ é o número de subconjuntos de tamanho r de $A \cup B$, com 0 elementos de A e r elementos de B;
    - $C(m, 1)C(n, r-1)$ é o número de subconjuntos de tamanho r de $A \cup B$, com 1 elemento de A e $r-1$ elementos de B;
    - $\vdots$
    - $C(m, r)C(n, 0)$ é o número de subconjuntos de tamanho r de $A \cup B$, com r elementos de A e 0 elementos de B.

(c) $C(m+n, m+r) = \sum_{k=0}^{m} C(m,k)C(n, r+k)$.
Sejam A e B dois conjuntos disjuntos, A de tamanho m e B de tamanho n. $C(m+n, m+r)$ é o número de subconjuntos de tamanho $m+r$ de $A \cup B$. E:

- $C(m,m)C(n,r) = C(m,0)C(n,r)$ é o número de subconjuntos de tamanho $m+r$ de $A \cup B$, com m elementos de A e r elementos de B;
- $C(m,m-1)C(n,r+1) = C(m,1)C(n,r+1)$ é o número de subconjuntos de tamanho $m+r$ de $A \cup B$, com $m-1$ elementos de A e $r+1$ elementos de B;
- $\vdots$
- $C(m,0)C(n,r+m) = C(m,m)C(n,r+m)$ é o número de subconjuntos de tamanho $m+r$ de $A \cup B$, com 0 elementos de A e $m+r$ elementos de B.

18. (a) Substituindo-se x por x/y em $(1+x)^n$:

$$(1+x)^n = \left(1 + \frac{x}{y}\right)^n = \left(\frac{x+y}{y}\right)^n = \frac{(x+y)^n}{y^n}.$$

Substituindo-se x por x/y em $\sum_{k=0}^{n} C(n,k)x^k$:

$$\sum_{k=0}^{n} C(n,k)x^k = \sum_{k=0}^{n} C(n,k)\left(\frac{x}{y}\right)^k = \frac{\sum_{k=0}^{n} C(n,k)x^k y^{n-k}}{y^n}.$$

Portanto, $(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} C(n,k)x^k y^{n-k}$.

(b) Derivando-se ambos os lados de $(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} C(n,k)x^k$ e multiplicando-se por x: $n(1+x)^{n-1}x = \sum_{k=0}^{n} C(n,k)kx^k$. Substituindo-se x por -1, obtém-se: $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k kC(n,k) = 0$.

19. (a) Substituindo-se x por 2: $\sum_{k=0}^{n} 2^k C(n,k) = 3^n$.

(b) Derivando-se, multiplicando-se por x e substituindo-se x por 3: $\sum_{k=0}^{n} k3^k C(n,k) = 3n.4^{n-1}$.

Funções Geradoras

20. (a) $1 + 2x + 2^2x^2 + 2^3x^3 + \cdots = \sum_{r\geq 0} 2^r x^r$.

(b) $C(n-1+0,0) + C(n-1+1,1)x + C(n-1+2,2)x^2 + C(n-1+3,3)x^3 + \cdots = \sum_{r\geq 0} C(n-1+r, r)x^r$.

(c) $C(n-1+0,0)x^n + C(n-1+1,1)x^{n+1} + C(n-1+2,2)x^{n+2} + \cdots = \sum_{r\geq n} C(n-1+r-n, r-n)x^r = \sum_{r\geq n} C(r-1, r-n)x^r$.

21. (a) O número de soluções para $x_1 + x_2 = 6$, com $x_k \geq 0$, é $C(2-1+6, 6)$. Logo, o número de soluções é $C(7,6)$ multiplicado pelo número de soluções para $x_3 + x_4 + x_5 = r$, com $x_3, x_4, x_5 \geq 2$ ("distribuindo-se" 6 igualmente entre as variáveis). Assim, a função geradora é $C(7,6) \times (x^2 + x^3 + x^4 + \cdots)^3 = 7x^6(1 + x + x^2 + \cdots)^3$.

(b) O número de soluções é o mesmo que para $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = r$, com $1 \leq x_1 < 2$, $2 \leq x_2 < 4$, $3 \leq x_3 < 6$ e $x_4 \geq 1$. Assim, a função geradora é $x(x^2 + x^3)(x^3 + x^4 + x^5)(x + x^2 + x^3 + \cdots)$.

(c) O número de soluções é o mesmo que para $y_1 + y_2 + y_3 = r$, com $y_1 = 4, 6, 8, \ldots$, $y_2 = 9, 12, 15, \ldots$, $y_3 = 20, 25, 30, \ldots$. Assim, a função geradora é $(x^4 + x^6 + x^8 + \cdots)(x^9 + x^{12} + x^{15} + \cdots)(x^{20} + x^{25} + x^{30} + \cdots)$.

22. O problema equivale a encontrar a função geradora para o número de soluções inteiras para $x_1 + x_2 + x_3 \leq r$, com $1 \leq x_k \leq 6$, que é o número de soluções inteiras para $x_1 + x_2 + x_3 + y = r$, com $1 \leq x_k \leq 6$ e $y \geq 0$. Assim, a função geradora é $(x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6)^3(1 + x + x^2 + \cdots)$.

23. (a)

$$\begin{aligned}
&(x^3 + x^4 + \cdots + x^{12})^4 \\
&\quad = x^{12}(1 + x^2 + x^3 \cdots + x^9)^4 = x^{12}(1 - x^{10})^4(1 + x + x^2 \cdots)^4 \\
&\quad = x^{12}(C(4,0) - C(4,1)x^{10} + C(4,2)x^{20} - C(4,3)x^{30} + C(4,4)x^{40}) \\
&\qquad\quad (C(4-1+0) + C(4-1+1,1)x + C(4-1+2,2)x^2 + \cdots)
\end{aligned}$$

Coeficiente de x^{24}: $C(4,0)C(4-1+12,12) - C(4,1)C(4-1+2,2) = 415$.

(b)

$$\begin{aligned}
&(x + x^2 + \cdots)^2(1 - x^3)^3 = x^2(1 + x + x^2 \cdots)^2(1 - x^3)^3 \\
&\quad = x^2(C(2-1+0) + C(2-1+1,1)x + C(2-1+2,2)x^2 + \cdots) \\
&\qquad (C(3,0) - C(3,1)x^3 + C(3,2)x^6 - C(3,3)x^9)
\end{aligned}$$

Coeficiente de x^6: $C(2-1+4,4)C(3,0) - C(2-1+1,1)C(3,1) = -1$.

(c)

$$\begin{aligned}
&(1 - x^2)^{12}/(1 - x)^3 = (1 - x^2)^{12}(1 + x + x^2 \cdots)^3 \\
&\quad = (C(12,0) - C(12,1)x^2 + C(12,2)x^4 - \cdots + C(12,12)x^{24}) \\
&\qquad (C(3-1+0) + C(3-1+1,1)x + C(3-1+2,2)x^2 + \cdots)
\end{aligned}$$

Coeficiente de x^5: $C(12,0)C(3-1+5,5) - C(12,1)C(3-1+3,3) + C(12,2)C(3-1+1,1) = 99$.

24. (a) $a_n = 3n - 4$.
FG para 1: $1/(1-x)$.
FG para n: $x(1/(1-x))' = x/(1-x)^2$.
FG para $3n$: $3x/(1-x)^2$.
FG para $3n-4$: $3x/(1-x)^2 - 4/(1-x) = (7x-4)/(1-x)^2$.

(b) $a_n = n(n-1)$.
FG para $n-1$: $x/(1-x)^2 - 1/(1-x) = (2x-1)/(1-x)^2$.
FG para $n(n-1)$: $x[(2x-1)/(1-x)^2]' = 2x^2/(1-x)^3$.

(c) $a_n = n^4$.
FG para n^2: $x[x/(1-x)^2]' = (x+x^2)/(1-x)^3$.
FG para n^3: $x[(x+x^2)/(1-x)^3]' = (x^3+4x^2+x)/(1-x)^4$.
FG para n^4: $x[(x^3+4x^2+x)/(1-x)^4]' = (x^4+11x^3+11x^2+x)/(1-x)^5$.

(d) $a_n = n^2 3^n$.
FG para 3^n: $1/(1-3x)$.
FG para $n3^n$: $x[1/(1-3x)]' = 3x/(1-3x)^2$.
FG para $n^2 3^n$: $x[3x/(1-3x)^2]' = 3x(1+3x)/(1-3x)^3$.

25. (a) FG para $3n-4$: $(7x-4)/(1-x)^2$.
FG para $\sum_{k=0}^{n}(3k-4)$: $(7x-4)/(1-x)^3 = (7x-4)[C(3-1+0)+C(3-1+1,1)x+C(3-1+2,2)x^2+\cdots]$. O coeficiente de x^n é $7C(3-1+n-1,n-1)-4C(3-1+n,n) = (n+1)(3n-8)/2$.

(b) FG para $n(n-1)$: $2x^2/(1-x)^3$.
FG para $\sum_{k=0}^{n}[k(k-1)]$: $2x^2/(1-x)^4 = 2x^2[C(4-1+0,0)+C(4-1+1,1)x+C(4-1+2,2)x^2+\cdots]$. O coeficiente de x^n é $2C(4-1+n-2,n-2) = 2C(n+1,n-2) = n(n^2-1)/3$.

(c) FG para n^4: $(x^4+11x^3+11x^2+x)/(1-x)^5$.
FG para $\sum_{k=0}^{n} k^4$: $(x^4+11x^3+11x^2+x)/(1-x)^6 = (x^4+11x^3+11x^2+x)[C(6-1+0,0)+C(6-1+1,1)x+C(6-1+2,2)x^2+\cdots]$. O coeficiente de x^n é $C(6-1+n-4,n-4)+11C(6-1+n-3,n-3)+11C(6-1+n-2,n-2)+C(6-1+n-1,n-1) = C(n+1,n-4)+11C(n+2,n-3)+11C(n+3,n-2)+C(n+4,n-1) = n(n+1)(6n^3+9n^2+n-1)/30$.

(d) FG para $n^2 3^n$: $3x(1+3x)/(1-3x)^3$.
FG para $\sum_{k=0}^{n}[k^2 3^k]$: $3x(1+3x)/(1-3x)^3(1-x)$. Decompondo em frações parciais, obtém-se $[3/(1-3x)^3]-[6/(1-3x)^2]+[9/2(1-3x)]-[3/2(1-x)] = 3(1+(3x)+(3x)^2+\cdots)^3-6(1+(3x)+(3x)^2+\cdots)^2+(9/2)(1+(3x)+(3x)^2+\cdots)-(3/2)(1+x+x^2+\cdots)$. O coeficiente de x^n é $3C(3-1+n,n)3^n-6C(2-1+n,n)3^n+(9/2)3^n-(3/2) = [3^{n+1}(n^2-n+1)-3]/2$.

26. (a) Função geradora:

$$
\begin{aligned}
(x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6)^4 &= x^4(1+x+x^2+x^3+x^4+x^5)^4\\
&= x^4(1-x^6)^4(1+x+x^2+\cdots)^4\\
&= x^4(C(4,0)-C(4,1)x^6+C(4,2)x^{12}-C(4,3)x^{18}+C(4,4)x^{24})\\
&\quad (C(4-1+0)+C(4-1+1,1)x+C(4-1+2,2)x^2+\cdots)
\end{aligned}
$$

Coeficiente de x^{10}: $C(4,0)C(4-1+6,6)-C(4,1)C(4-1+0,0) = C(9,6)-4 = 80$.

(b) Função geradora: $(x+x^2+x^3+x^4+x^5)(x^2+x^3+\cdots)(x^3+x^4+\cdots) = x^6(1+x+x^2+x^3+x^4)(1+x+x^2+\cdots)^2 = x^6(1+x+x^2+x^3+x^4)[C(2-1+0,0)+C(2-1+1,1)x+C(2-1+2,2)x^2+\cdots)]$.
Coeficiente de x^6: $1\times 1\times C(1,0) = 1$.

(c) Função geradora: $(x+x^2+\cdots+x^{10})^4(1+x+x^2+\cdots) = x^4(1+x+x^2+\cdots+x^9)^4(1+x+x^2+\cdots) = x^4(1-x^{10})^4(1+x+x^2+\cdots)^5 = x^4[C(4,0)-C(4,1)x^{10}+C(4,2)x^{20}-C(4,3)x^{30}+C(4,4)x^{40}][C(5-1+0,0)+C(5-1+1,1)x+C(5-1+2,2)x^2+\cdots)]$.

Coeficiente de x^{10}: $C(4,0)C(5-1+6,6) = C(10,6) = 210$.

27. A resposta é o número de soluções inteiras para $x_1+\cdots+x_{20}=r$, com $1 \leq x_k \leq 4$. A função geradora é $(x+x^2+x^3+x^4)^{20} = x^{20}(1+x+x^2+x^3)^{20} = x^{20}(1-x^4)^{20}(1+x+x^2+\cdots)^{20} = x^{20}[C(20,0)-C(20,1)x^4+C(20,2)x^8-\cdots+C(20,20)x^{80}][C(20-1+0,0)+C(20-1+1,1)x+\cdots]$.

    Coeficiente de x^r: $C(20,0)C(r-1,r-20)-C(20,1)C(r-5,r-24)+\cdots$.

28. A resposta é o número de soluções inteiras para $x_1+\cdots+x_{10}+y_1+\cdots+y_r=20$, com $x_i \geq 1$ e $y_k \leq 3$. A função geradora é $(x+x^2+x^3+\cdots)^{10}(1+x+x^2+x^3)^r = x^{10}(1+x+x^2+\cdots)^{10}(1-x^4)^r(1+x+x^2+\cdots)^r = x^{10}(1-x^4)^r(1+x+x^2+\cdots)^{10+r} = x^{10}[C(r,0)-C(r,1)x^4+C(r,2)x^8-\cdots+(-1)^rC(r,r)x^{4r}][C(r+10-1+0,0)+C(r+10-1+1,1)x+\cdots]$.

    Coeficiente de x^{20}: $C(r,0)C(r+10-1+10,10)-C(r,1)C(r+10-1+6,6)+C(r,2)C(r+10-1+2,2) = C(r+19,10)-rC(r+15,6)+(r(r-1)/2)C(r+11,2)$.

29. A função geradora é $(1+x+x^2+x^3)^3(1+x+x^2+\cdots)^2$. O coeficiente de x^{20}: $C(3,0)C(5-1+20,20)-C(3,1)C(5-1+16,16)+C(3,2)C(5-1+12,12)-C(3,3)C(5-1+8,8)$.

30. A resposta é o número de soluções inteiras para $x_1+x_2+x_3=4r$, com $0 \leq x_i \leq 2r$. A função geradora é $(1+x+x^2+\cdots+x^{2r})^3$. Isto é igual a $(1-x^{2r+1})^3(1+x+x^2+\cdots)^3$, que é igual a $[C(3,0)-C(3,1)x^{2r+1}+C(3,2)x^{4r+2}+C(3,3)x^{6r+3}]\times[C(3-1+0,0)+C(3-1+1,1)x+C(3-1+2,2)x^2+\cdots]$.

    Coeficiente de x^{4r}: $C(3,0)C(3-1+4r,4r)-C(3,1)C(3-1+2r-1,2r-1)$.