

Combinatória Elementar

1. De quantas maneiras se pode arranjar as letras em MATEMATICAMENTE:

- (a) No total?
- (b) Com todos os As consecutivos?
- (c) Com todas as vogais consecutivas?
- (d) De forma que não existam (dois) A's consecutivos?

Solução:

- (a) $P(15; 3, 3, 3, 1, 1, 1) = 15!/(3!3!3!).$
- (b) $P(13; 3, 3, 3, 1, 1, 1) = 13!/(3!3!3!).$
- (c) $P(9; 3, 3, 1, 1, 1)P(7; 3, 3, 1) = [9!/(3!3!)] \times [7!/(3!3!).]$
- (d) Solução 1: $P(12; 3, 3, 3, 1, 1, 1)C(13, 3) = C(13, 3)12!/(3!3!3!).$
Solução 2: $C(4 - 1 + 10, 10)P(12; 3, 3, 3, 1, 1, 1) = C(13, 10)12!/(3!3!3!).$

2. Determine o número de seleções de 6 letras do alfabeto (que contém 26 letras), tais que nenhuma letra apareça em uma seleção mais de 2 vezes.

Solução: $C(26, 6) + C(26, 1)C(25, 4) + C(26, 2)C(24, 2) + C(26, 3)C(23, 0).$

3. Quantos grupos de 10 casais podem ser constituídos a partir de 10 homens e 10 mulheres?

Solução: $10!.$

4. Uma mercearia produz 7 tipos de pães. Supondo que ela vá doar uma cesta de 20 pães para uma creche, quantos tipos de cestas são possíveis:

- (a) Se a cesta pode ser constituída de quaisquer tipos de pães?
- (b) Se a cesta deve ter pelo menos um pão de cada tipo?

Solução:

- (a) $C(7 - 1 + 20, 20).$
- (b) $C(7 - 1 + 13, 13).$

5. Um grupo de estudos de 10 pessoas deve ser formado a partir de uma turma de 12 alunos e 10 alunas. De quantas maneiras é possível fazer essa formação, supondo que:

- (a) Deva haver exatamente 5 alunas no grupo?
- (b) Deva haver, no mínimo, 4 alunas no grupo?
- (c) Deva haver, no mínimo, tantas alunas quanto alunos no grupo?

Solução:

- (a) $C(10, 5)C(12, 5).$
- (b) $\sum_{k=4}^{10} C(10, k)C(12, 10 - k).$
- (c) $\sum_{k=5}^{10} C(10, k)C(12, 10 - k).$

6. De quantas maneiras um grupo de 25 atletas pode ser particionado em 4 grupos, três grupos de 6 atletas cada um e um grupo de 7 atletas?

Solução: $C(25; 6, 6, 6, 7)/3! = 25!/(6!6!6!7!)$.

7. Quantos números menores que 10.000.000 contêm o dígito 9?

Solução: $10^7 - 10^6$.

8. Em certo evento é sorteado um número de 0 a 999. Qual é a probabilidade de se sortear um número com dígitos em ordem crescente? E em ordem não decrescente?

Solução:

(a) $C(10, 3)/10^3$.

(b) $(10^3 - C(10, 3))/10^3$.

9. Suponha que uma moeda seja lançada 50 vezes. Qual é probabilidade que:

(a) Ocorram exatamente 25 caras?

(b) Ocorram, no mínimo, 25 caras?

Solução:

(a) $C(50, 25)/2^{50}$.

(b) $\sum_{k=25}^{50} C(50, k)/2^{50}$.

10. Mostre que o produto de r números naturais consecutivos é divisível por $r!$. (*Dica:* considere o número de seleções de r objetos de um conjunto de $n + r$ objetos.)

Solução: Pegue uma seqüência qualquer de r números consecutivos iniciando no número $n + 1$: $n + 1, n + 2, \dots, n + r$. Como $P(n + r, r) = (n + r) \cdot (n + r - 1) \cdots (n + 1)$ e $C(n + r, r) = P(n + r, r)/r!$, segue-se que $(n + 1) \cdot (n + 2) \cdots (n + r)$ é divisível por $r!$. Como $n + 1, n + 2, \dots, n + r$ é uma seqüência arbitrária de r números consecutivos, conclui-se que o produto de quaisquer r número naturais consecutivos é divisível por $r!$.

11. Quantas soluções inteiras existem para $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 12$, se, para cada $1 \leq k \leq 5$, $x_k \geq 2k - 5$?

Solução: É igual ao número soluções para: $(y_1 + 2 - 5) + (y_2 + 4 - 5) + (y_3 + 6 - 5) + (y_4 + 8 - 5) + (y_5 + 10 - 5) = 12$ com $y_k \geq 0$, ou seja, ao número de soluções para: $y_1 + \cdots + y_5 = 17$ com $y_k \geq 0$. Resposta: $C(5 - 1 + 17, 17)$.

12. Encontrar o número de soluções em inteiros não-negativos para o sistema de equações:

$$\left. \begin{array}{l} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 20 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 8 \end{array} \right\} \text{ com } x_k \geq 0$$

Solução: O número de soluções para $x_1 + x_2 + x_3 = 8$ com $x_k \geq 0$ é $C(3 - 1 + 8, 8)$. O número de soluções para $8 + x_4 + x_5 = 20$ é $C(2 - 1 + 12, 12)$. Logo, a resposta é: $C(3 - 1 + 8, 8)C(2 - 1 + 12, 12)$.

13. Qual é o coeficiente de x^{10} em $(1 - 2x - 3y)^{20}$?

Solução: $C(20; 10, 10, 0)1^{10}(-2)^{10}(-3)^0 = [20!/10!10!]2^{10}$.

14. Prove, por indução, que $C(n+1, r+1) = \sum_{k=r}^n C(k, r)$.

Solução: A prova será feita por indução sobre n . Para $n = r$, tem-se: $C(r+1, r+1) = 1 = C(r, r)$. Seja $n \geq r$ arbitrário. Suponha, como hipótese de indução, que $C(n+1, r+1) = \sum_{k=r}^n C(k, r)$. Tem-se:

$$\begin{aligned} \sum_{k=r}^{n+1} C(k, r) &= \sum_{k=r}^n C(k, r) + C(n+1, r) && \text{pela definição de somatória} \\ &= C(n+1, r+1) + C(n+1, r) && \text{pela hipótese de indução} \\ &= C(n+2, r+1) && \text{pela identidade de Pascal} \end{aligned}$$

15. Prove, usando raciocínio combinatório:

- (a) $\sum_{k=0}^n C(n, k)^2 = C(2n, n)$.
 (b) $\sum_{k=0}^r C(m, k)C(n, r-k) = C(m+n, r)$.

Solução:

- (a) Sejam A e B dois conjuntos disjuntos de tamanho n . $C(2n, n)$ é o número de subconjuntos de tamanho n de $A \cup B$. E:
- $C(n, 0)^2 = C(n, 0)C(n, n)$ é o número de subconjuntos de tamanho n de $A \cup B$, com 0 elementos de A e n elementos de B ;
 - $C(n, 1)^2 = C(n, 1)C(n, n-1)$ é o número de subconjuntos de tamanho n de $A \cup B$, com 1 elemento de A e $n-1$ elementos de B ;
 - $\vdots$
 - $C(n, n)^2 = C(n, n)C(n, 0)$ é o número de subconjuntos de tamanho n de $A \cup B$, com n elementos de A e 0 elementos de B .
- (b) Sejam A e B dois conjuntos disjuntos, A de tamanho m e B de tamanho n . $C(m+n, r)$ é o número de subconjuntos de tamanho r de $A \cup B$. E:
- $C(m, 0)C(n, r)$ é o número de subconjuntos de tamanho r de $A \cup B$, com 0 elementos de A e r elementos de B ;
 - $C(m, 1)C(n, r-1)$ é o número de subconjuntos de tamanho r de $A \cup B$, com 1 elemento de A e $r-1$ elementos de B ;
 - $\vdots$
 - $C(m, r)C(n, 0)$ é o número de subconjuntos de tamanho r de $A \cup B$, com r elementos de A e 0 elementos de B .

16. Avalie, usando o teorema binomial:

- (a) $\sum_{k=0}^n 2^k C(n, k)$.
 (b) $\sum_{k=0}^n k 3^k C(n, k)$.

Solução:

- (a) Substituindo-se x por 2: $\sum_{k=0}^n 2^k C(n, k) = 3^n$.
 (b) Derivando-se, multiplicando-se por x e substituindo-se x por 3: $\sum_{k=0}^n k 3^k C(n, k) = 3n \cdot 4^{n-1}$.

Funções Geradoras

17. Apresente funções geradoras para:

- (a) O número de seqüências binárias de r dígitos.
- (b) O número de multiconjuntos de r elementos tomados de $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$.
- (c) O número de multiconjuntos de r elementos tomados de $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, nos quais cada elemento aparece pelo menos uma vez.

Solução:

- (a) $1 + 2x + 2^2x^2 + 2^3x^3 + \dots = \sum_{r \geq 0} 2^r x^r$.
- (b) $C(n-1+0, 0) + C(n-1+1, 1)x + C(n-1+2, 2)x^2 + C(n-1+3, 3)x^3 + \dots = \sum_{r \geq 0} C(n-1+r, r)x^r$.
- (c) $C(n-1+0, 0)x^n + C(n-1+1, 1)x^{n+1} + C(n-1+2, 2)x^{n+2} + \dots = \sum_{r \geq n} C(n-1+r-n, r-n)x^r = \sum_{r \geq n} C(r-1, r-n)x^r$.

18. Apresente funções geradoras para os seguintes problemas de equações inteiras:

- (a) $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = r$, com $x_1 + x_2 = 6$ e $x_k \geq 0$.
- (b) $x_1 + x_2 + x_3 < r$, com $k \leq x_k < 2k$.
- (c) $2x_1 + 3x_2 + 5x_3 = r$, com $x_k > k$.

Solução:

- (a) O número de soluções para $x_1 + x_2 = 6$, com $x_k \geq 0$, é $C(2-1+6, 6)$. Logo, o número de soluções é $C(7, 6)$ multiplicado pelo número de soluções para $x_3 + x_4 + x_5 = r$, com $x_3, x_4, x_5 \geq 2$ ("distribuindo-se" 6 igualmente entre as variáveis). Assim, a função geradora é $C(7, 6) \times (x^2 + x^3 + x^4 + \dots)^3 = 7x^6(1 + x + x^2 + \dots)^3$.
- (b) O número de soluções é o mesmo que para $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = r$, com $1 \leq x_1 < 2$, $2 \leq x_2 < 4$, $3 \leq x_3 < 6$ e $x_4 \geq 1$. Assim, a função geradora é $x(x^2 + x^3)(x^3 + x^4 + x^5)(x + x^2 + x^3 + \dots)$.
- (c) O número de soluções é o mesmo que para $y_1 + y_2 + y_3 = r$, com $y_1 = 4, 6, 8, \dots$, $y_2 = 9, 12, 15, \dots$, $y_3 = 20, 25, 30, \dots$. Assim, a função geradora é $(x^4 + x^6 + x^8 + \dots)(x^9 + x^{12} + x^{15} + \dots)(x^{20} + x^{25} + x^{30} + \dots)$.

19. Encontre a função geradora para o número de maneiras em que o lançamento de 3 dados distintos pode produzir um soma de, no máximo, r .

Solução: O problema equivale a encontrar a função geradora para o número de soluções inteiras de $x_1 + x_2 + x_3 \leq r$, com $1 \leq x_k \leq 6$, que é o número de soluções inteiras para $x_1 + x_2 + x_3 + y = r$, com $1 \leq x_k \leq 6$ e $y \geq 0$. Assim, a função geradora é $(x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6)^3(1 + x + x^2 + \dots)$.

20. Encontre os coeficientes dos seguintes termos:

- (a) x^{24} em $(x^3 + x^4 + \dots + x^{12})^4$.
- (b) x^6 em $(x + x^2 + \dots)^2(1 - x^3)^3$.
- (c) x^5 em $(1 - x^2)^{12}/(1 - x)^3$.

Solução:

$$\begin{aligned}
 & (a) \quad (x^3 + x^4 + \dots + x^{12})^4 \\
 & \quad = x^{12}(1 + x^2 + x^3 \dots + x^9)^4 = x^{12}(1 - x^{10})^4(1 + x + x^2 \dots)^4 \\
 & \quad = x^{12}(C(4, 0) - C(4, 1)x^{10} + C(4, 2)x^{20} - C(4, 3)x^{30} + C(4, 4)x^{40}) \\
 & \quad \quad (C(4-1+0) + C(4-1+1, 1)x + C(4-1+2, 2)x^2 + \dots)
 \end{aligned}$$

Coeficiente de x^{24} : $C(4,0)C(4-1+12,12) - C(4,1)C(4-1+2,2) = 415$.

(b)

$$\begin{aligned}(x + x^2 + \dots)^2(1 - x^3)^3 &= x^2(1 + x + x^2 \dots)^2(1 - x^3)^3 \\ &= x^2(C(2-1+0) + C(2-1+1,1)x + C(2-1+2,2)x^2 + \dots) \\ &\quad (C(3,0) - C(3,1)x^3 + C(3,2)x^6 - C(3,3)x^9)\end{aligned}$$

Coeficiente de x^6 : $C(2-1+4,4)C(3,0) - C(2-1+1,1)C(3,1) = -1$.

(c)

$$\begin{aligned}(1 - x^2)^{12}/(1 - x)^3 &= (1 - x^2)^{12}(1 + x + x^2 \dots)^3 \\ &= (C(12,0) - C(12,1)x^2 + C(12,2)x^4 - \dots + C(12,12)x^{24}) \\ &\quad (C(3-1+0) + C(3-1+1,1)x + C(3-1+2,2)x^2 + \dots)\end{aligned}$$

Coeficiente de x^5 : $C(12,0)C(3-1+5,5) - C(12,1)C(3-1+3,3) + C(12,2)C(3-1+1,1) = 99$.

21. Encontre funções geradoras para os seguintes a_n :

- (a) $a_n = 3n - 4$.
- (b) $a_n = n(n - 1)$.
- (c) $a_n = n^4$.
- (d) $a_n = n^2 3^n$.

Solução:

- (a) $a_n = 3n - 4$.
FG para 1: $1/(1 - x)$.
FG para n : $x(1/(1 - x))' = x/(1 - x)^2$.
FG para $3n$: $3x/(1 - x)^2$.
FG para $3n - 4$: $3x/(1 - x)^2 - 4/(1 - x) = (7x - 4)/(1 - x)^2$.
- (b) $a_n = n(n - 1)$.
FG para $n - 1$: $x/(1 - x)^2 - 1/(1 - x) = (2x - 1)/(1 - x)^2$.
FG para $n(n - 1)$: $x[(2x - 1)/(1 - x)^2]' = 2x^2/(1 - x)^3$.
- (c) $a_n = n^4$.
FG para n^2 : $x[x/(1 - x)^2]' = (x + x^2)/(1 - x)^3$.
FG para n^3 : $x[(x + x^2)/(1 - x)^3]' = (x^3 + 4x^2 + x)/(1 - x)^4$.
FG para n^4 : $x[(x^3 + 4x^2 + x)/(1 - x)^4]' = (x^4 + 11x^3 + 11x^2 + x)/(1 - x)^5$.
- (d) $a_n = n^2 3^n$.
FG para 3^n : $1/(1 - 3x)$.
FG para $n3^n$: $x[1/(1 - 3x)]' = 3x/(1 - 3x)^2$.
FG para $n^2 3^n$: $x[3x/(1 - 3x)^2]' = 3x(1 + 3x)/(1 - 3x)^3$.

22. Use as funções geradoras do exercício anterior para avaliar as seguintes somas:

- (a) $\sum_{k=0}^n (3k - 4)$.
- (b) $2 \times 1 + 3 \times 2 + \dots + n(n - 1)$.
- (c) $\sum_{k=1}^n n^4$.

(d) $3 + 2^2 3^2 \cdots + n^2 3^n$.

Solução:

(a) FG para $3n - 4$: $(7x - 4)/(1 - x)^2$.

FG para $\sum_{k=0}^n (3k - 4)$: $(7x - 4)/(1 - x)^3 = (7x - 4)[C(3 - 1 + 0) + C(3 - 1 + 1, 1)x + C(3 - 1 + 2, 2)x^2 + \cdots]$. O coeficiente de x^n é $7C(3 - 1 + n - 1, n - 1) - 4C(3 - 1 + n, n) = (n + 1)(3n - 8)/2$.

(b) FG para $n(n - 1)$: $2x^2/(1 - x)^3$.

FG para $\sum_{k=0}^n [k(k - 1)]$: $2x^2/(1 - x)^4 = 2x^2[C(4 - 1 + 0, 0) + C(4 - 1 + 1, 1)x + C(4 - 1 + 2, 2)x^2 + \cdots]$. O coeficiente de x^n é $2C(4 - 1 + n - 2, n - 2) = 2C(n + 1, n - 2) = n(n^2 - 1)/3$.

(c) FG para n^4 : $(x^4 + 11x^3 + 11x^2 + x)/(1 - x)^5$.

FG para $\sum_{k=0}^n k^4$: $(x^4 + 11x^3 + 11x^2 + x)/(1 - x)^6 = (x^4 + 11x^3 + 11x^2 + x)[C(6 - 1 + 0, 0) + C(6 - 1 + 1, 1)x + C(6 - 1 + 2, 2)x^2 + \cdots]$. O coeficiente de x^n é $C(6 - 1 + n - 4, n - 4) + 11C(6 - 1 + n - 3, n - 3) + 11C(6 - 1 + n - 2, n - 2) + C(6 - 1 + n - 1, n - 1) = C(n + 1, n - 4) + 11C(n + 2, n - 3) + 11C(n + 3, n - 2) + C(n + 4, n - 1) = n(n + 1)(6n^3 + 9n^2 + n - 1)/30$.

(d) FG para $n^2 3^n$: $3x(1 + 3x)/(1 - 3x)^3$.

FG para $\sum_{k=0}^n [k^2 3^k]$: $3x(1 + 3x)/(1 - 3x)^3(1 - x)$. Decompondo em frações parciais, obtém-se $[3/(1 - 3x)^3] - [6/(1 - 3x)^2] + [9/2(1 - 3x)] - [3/2(1 - x)] = 3(1 + (3x) + (3x)^2 + \cdots)^3 - 6(1 + (3x) + (3x)^2 + \cdots)^2 + (9/2)(1 + (3x) + (3x)^2 + \cdots) - (3/2)(1 + x + x^2 + \cdots)$. O coeficiente de x^n é $3C(3 - 1 + n, n)3^n - 6C(2 - 1 + n, n)3^n + (9/2)3^n - (3/2) = [3^{n+1}(n^2 - n + 1) - 3]/2$.

23. Utilizando funções geradoras, determine o número de soluções inteiras para as seguintes equações:

(a) $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 10$, com $1 \leq x_i \leq 6$.

(b) $x_1 + x_2 + x_3 = 6$, com $1 \leq x_1 \leq 5$, $x_2 \geq 2$ e $x_3 \geq 3$.

(c) $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 10$, com $1 \leq x_i \leq 10$.

Solução:

(a) Função geradora:

$$\begin{aligned} (x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6)^4 &= x^4(1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5)^4 \\ &= x^4(1 - x^6)^4(1 + x + x^2 + \cdots)^4 \\ &= x^4(C(4, 0) - C(4, 1)x^6 + C(4, 2)x^{12} - C(4, 3)x^{18} + C(4, 4)x^{24}) \\ &\quad (C(4 - 1 + 0) + C(4 - 1 + 1, 1)x + C(4 - 1 + 2, 2)x^2 + \cdots) \end{aligned}$$

Coeficiente de x^{10} : $C(4, 0)C(4 - 1 + 6, 6) - C(4, 1)C(4 - 1 + 0, 0) = C(9, 6) - 4 = 80$.

(b) Função geradora: $(x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5)(x^2 + x^3 + \cdots)(x^3 + x^4 + \cdots) = x^6(1 + x + x^2 + x^3 + x^4)(1 + x + x^2 + \cdots)^2 = x^6(1 + x + x^2 + x^3 + x^4)[C(2 - 1 + 0, 0) + C(2 - 1 + 1, 1)x + C(2 - 1 + 2, 2)x^2 + \cdots]$.

Coeficiente de x^6 : $1 \times 1 \times C(1, 0) = 1$.

(c) Função geradora: $(x + x^2 + \cdots + x^{10})^4(1 + x + x^2 + \cdots) = x^4(1 + x + x^2 + \cdots + x^9)^4(1 + x + x^2 + \cdots) = x^4(1 - x^{10})^4(1 + x + x^2 + \cdots)^5 = x^4[C(4, 0) - C(4, 1)x^{10} + C(4, 2)x^{20} - C(4, 3)x^{30} + C(4, 4)x^{40}][C(5 - 1 + 0, 0) + C(5 - 1 + 1, 1)x + C(5 - 1 + 2, 2)x^2 + \cdots]$.

Coeficiente de x^{10} : $C(4, 0)C(5 - 1 + 6, 6) = C(10, 6) = 210$.

24. De quantas maneiras se pode distribuir r bombons idênticos a 20 crianças, se cada criança recebe no mínimo um, mas não mais que 4 bombons?

Solução: A resposta é o número de soluções inteiras de $x_1 + \dots + x_{20} = r$, com $1 \leq x_k \leq 4$. A função geradora é $(x + x^2 + x^3 + x^4)^{20} = x^{20}(1 + x + x^2 + x^3)^{20} = x^{20}(1 - x^4)^{20}(1 + x + x^2 + \dots)^{20} = x^{20}[C(20, 0) - C(20, 1)x^4 + C(20, 2)x^8 - \dots + C(20, 20)x^{80}][C(20 - 1 + 0, 0) + C(20 - 1 + 1, 1)x + \dots]$.

Coeficiente de x^r : $C(20, 0)C(r - 1, r - 20) - C(20, 1)C(r - 5, r - 24) + \dots$.

25. Quantas maneiras existem de distribuir 20 cédulas de 1 real a 10 meninas e r meninos, se cada menina recebe no mínimo 1 real e cada menino recebe no máximo 3 reais?

Solução: A resposta é o número de soluções inteiras para $x_1 + \dots + x_{10} + y_1 + \dots + y_r = 20$, com $x_i \geq 1$ e $y_k \leq 3$. A função geradora é $(x + x^2 + x^3 + \dots)^{10}(1 + x + x^2 + x^3)^r = x^{10}(1 + x + x^2 + x^3)^r = x^{10}(1 - x^4)^r(1 + x + x^2 + \dots)^r = x^{10}(1 - x^4)^r(1 + x + x^2 + \dots)^{10+r} = x^{10}[C(r, 0) - C(r, 1)x^4 + C(r, 2)x^8 - \dots + (-1)^r C(r, r)x^{4r}][C(r + 10 - 1 + 0, 0) + C(r + 10 - 1 + 1, 1)x + \dots]$.

Coeficiente de x^{20} : $C(r, 0)C(r + 10 - 1 + 10, 10) - C(r, 1)C(r + 10 - 1 + 6, 6) + C(r, 2)C(r + 10 - 1 + 2, 2) = C(r + 19, 10) - rC(r + 15, 6) + (r(r - 1)/2)C(r + 11, 2)$.

26. Use função geradora para encontrar o número de maneiras de pintar 20 quartos idênticos de um hotel com 5 cores, se existe tintas das cores azul, cor-de-rosa e verde suficientes para pintar no máximo 3 quartos (para cada uma das cores).

Solução: A função geradora é $(1 + x + x^2 + x^3)^3(1 + x + x^2 + \dots)^2$. O coeficiente de x^{20} : $C(3, 0)C(5 - 1 + 20, 20) - C(3, 1)C(5 - 1 + 16, 16) + C(3, 2)C(5 - 1 + 12, 12) - C(3, 3)C(5 - 1 + 8, 8)$.

27. Quantas maneiras existem de selecionar $4r$ bolas a partir de $2r$ bolas vermelhas idênticas, $2r$ bolas verdes idênticas e $2r$ bolas brancas idênticas?

Solução: A resposta é o número de soluções inteiras para $x_1 + x_2 + x_3 = 4r$, com $0 \leq x_i \leq 2r$. A função geradora é $(1 + x + x^2 + \dots + x^{2r})^3$. Isto é igual a $(1 - x^{2r+1})^3(1 + x + x^2 + \dots)^3$, que é igual a $[C(3, 0) - C(3, 1)x^{2r+1} + C(3, 2)x^{4r+2} - C(3, 3)x^{6r+3}][C(3 - 1 + 0, 0) + C(3 - 1 + 1, 1)x + C(3 - 1 + 2, 2)x^2 + \dots]$.

Coeficiente de x^{4r} : $C(3, 0)C(3 - 1 + 4r, 4r) - C(3, 1)C(3 - 1 + 2r - 1, 2r - 1)$.