1. Use a notação de somatória para expressar as somas:

   a) $1 + 2 + 4 + 8 + 16 + \cdots + 2048$.
   b) $1/2 + 3/5 + 2/3 + 5/7 + \cdots + n/(n + 2)$.

   Solução:

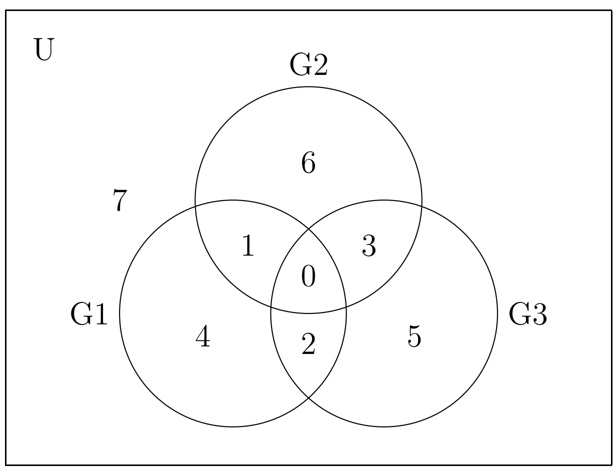
   a) $\sum_{k=0}^{11} 2^k$.
   b) $\sum_{k=2}^{n} k/(k + 2)$.

2. A partir de um universo de 28 pessoas, foram formados 3 grupos, $G1$, $G2$ e $G3$, $G1$ com 7 pessoas e os outros dois com 10 pessoas cada um. Sabe-se que:

   - 1 pessoa pertence a ambos os grupos $G1$ e $G2$;
   - 2 pessoas pertencem a ambos, $G1$ e $G3$;
   - 3 pessoas pertencem a $G2$ e $G3$; e
   - nenhuma pessoa pertence a todos os três grupos.

   Desenhe um diagrama de Venn com regiões para três conjuntos que representem os grupos $G1$, $G2$ e $G3$. Escreva o número de pessoas correspondente a cada uma das oito regiões do diagrama de Venn. Evidentemente, deve ser mostrado como cada número foi calculado.

   Solução:



   Os cálculos:

   - $|G1 - (G2 \cup G3)| = 7 - 1 - 2 = 4$;
   - $|G2 - (G1 \cup G3)| = 10 - 1 - 3 = 6$;
   - $|G3 - (G1 \cup G2)| = 10 - 2 - 3 = 5$;
   - $|U - (G1 \cup G2 \cup G3)| = 28 - 1 - 2 - 3 - 4 - 5 - 6 = 7$.

3. Que propriedades (dentre reflexividade, simetria e transitividade) têm as seguintes relações? Quais são relações de equivalência?

a) R sobre $\{1,2,3\}$, $R = \{(1,1),(2,2),(3,3)\}$.

b) R sobre $\{1,2,3\}$, $R = \{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),(2,3),(3,2),(3,3)\}$.

c) M sobre todos os habitantes de BH definida por: xMy se, e somente se, x tem a mesma idade que y.

d) V sobre todos os habitantes de BH definida por: xVy se, e somente se, x é mais velho que y.

Solução:

a) Reflexiva, simétrica e transitiva. Logo, é relação de equivalência.

b) Reflexiva e simétrica.

c) Reflexiva, simétrica e transitiva. Logo, é relação de equivalência.

d) Transitiva.

4. Seja a função $f : Im \to Qd$, em que:

- $Im = \{i \mid i = 2n - 1 \text{ para algum } n \in \mathbf{Z}^+\}$ e
- $Qd = \{q \mid q = n^2 \text{ para algum } n \in \mathbf{Z}^+\}$

sendo $\mathbf{Z}^+$ o conjunto dos números inteiros positivos, e $f(2n-1) = \sum_{k=1}^{n}(2k-1)$ para cada $n \in \mathbf{Z}^+$. Mostre que f é uma função bijetora (correspondência um para um).

Solução:

Será demonstrado, por indução matemática, que $f(2n-1) = n^2$ para cada $n \in \mathbf{Z}^+$. Inicialmente, veja que $f(2 \times 1 - 1) = \sum_{k=1}^{1}(2k-1) = 1 = 1^2$. Seja $n \in \mathrm{Z}^+$ arbitrário. Suponha, como hipótese de indução, que $f(2n-1) = n^2$. Segue-se, então, que $f(2(n+1)-1) = \sum_{k=1}^{n+1}(2k-1) = \sum_{k=1}^{n}(2k-1) + 2(n+1) - 1 = n^2 + 2(n+1) - 1$ pela hipótese de indução. Logo, $f(2(n+1)-1) = n^2 + 2n + 2 - 1 = n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2$.

Logo, o contradomínio de f é Qd e, portanto, f é sobrejetora. Além disso, f é injetora, pois se $2n_1 - 1 \neq 2n_2 - 1$, segue-se que $n_1 \neq n_2$ e, portanto, $n_1^2 \neq n_2^2$. Como f é injetora e sobrejetora, conclui-se que é bijetora.

5. Prove que se $x^2 + y^2 = z^2$, então pelo menos um, dentre x, y e z, é par.

Solução:

Pela contrapositiva. Suponha que x, y e z são ímpares. Neste caso, x^2, y^2 e z^2 também são ímpares. Mas a soma de dois números ímpares é par, o que implica que $x^2 + y^2$ é par. Como z^2 é ímpar e $x^2 + y^2$ é par, $x^2 + y^2 \neq z^2$.

6. Seja a seguinte definição recursiva para uma seqüência $10, 20, 70, 200, 610, \ldots$:

$a_0 = 10$, $a_1 = 20$ e para $n \geq 2$, $a_n = 2a_{n-1} + 3a_{n-2}$.

Prove, por indução, que para todo $n \in \mathbf{N}$:

$$a_n = \frac{5}{2} \times (3^{n+1} + (-1)^n).$$

Solução:

Tem-se: $a_0 = 10 = (5/2)(3^1 + (-1)^0)$ e $a_1 = 20 = (5/2)(9-1) = (5/2)(3^2 + (-1)^1)$. Seja $n \geq 1$ arbitrário. Suponha, como hipótese de indução, que $a_k = (5/2)(3^{k+1} + (-1)^k)$ para $1 \leq k \leq n$. Segue-se que:

$$
\begin{aligned}
a_{n+1} &= 2a_n + 3a_{n-1} && \text{pela def. de } a_n\text{, pois } n+1 \geq 2 \\
&= 2(5/2)(3^{n+1} + (-1)^n) + 3(5/2)(3^n + (-1)^{n-1}) && \text{pela hipótese de indução} \\
&= (5/2)(2.3^{n+1} + 2.(-1)^n + 3.3^n + 3.(-1)^{n-1}) \\
&= (5/2)(3^{n+2} + (-1)^{n-1}) \\
&= (5/2)(3^{n+2} + (-1)^{n+1}).
\end{aligned}
$$