

As 4 primeiras questões valem 2,5 pontos cada uma, e as duas últimas, 3 pontos.

1. Use a notação de somatória para expressar as somas:

- a) $(1 \times 2) + (2 \times 3) + \cdots + n(n+1)$.
- b) $-1^2 + 2^2 - 3^2 + 4^2 - \cdots - 99^2 + 100^2$.

2. Mostre como a técnica de prova indireta para a implicação (também chamada de prova pela contrapositiva) pode ser usada para demonstrar o princípio da casa de pombos (*pigeonhole principle*).

3. Que propriedades, dentre reflexividade, simetria e transitividade, têm as seguintes relações? Apenas quando a relação *não* tiver a propriedade, justifique. Quais são relações de equivalência?

- a) R sobre $\{1, 2\}$, $R = \{(1, 1), (2, 2), (1, 2)\}$.
- b) S sobre $\{1, 2, 3\}$, $R = \{(1, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 2)\}$.
- c) C sobre todos os alunos de certa universidade, definida por: xCy se, e somente se, x e y fazem o mesmo curso, *supondo que nenhum aluno faz mais de um curso*.
- d) D sobre todos os alunos de certa universidade, definida por: xDy se, e somente se, x e y fazem o mesmo curso, *supondo que existe aluno que faz mais de um curso e que todo curso tem aluno que faz apenas um curso*.

4. Seja um conjunto de 20 pessoas, 13 das quais do sexo feminino. Suponha que 8 destas pessoas do sexo feminino sejam casadas. Em cada um dos casos a seguir, diga se a informação adicional é suficiente para determinar o número de *pessoas do sexo masculino casadas*. Se for, determine tal número.

- a) Há 12 pessoas que são casadas ou são do sexo feminino (ou são ambos).
- b) Há 8 pessoas solteiras.
- c) Há 15 pessoas que são do sexo feminino ou são solteiras.

5. Supondo que P seja o conjunto dos números naturais pares, \mathbf{N} o conjunto dos números naturais, e \mathbf{Z} o conjunto dos números inteiros, construa funções *bijetoras*:

- a) $f : P \rightarrow \mathbf{N}$;
- b) $g : \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{Z}$;
- c) $h : P \rightarrow \mathbf{Z}$.

6. Prove, por indução, que para todo $n \in \mathbf{Z}^+$:

$$\sum_{k=1}^n (-1)^k k^2 = (-1)^n \frac{n(n+1)}{2}.$$