Matemática Discreta — 1º semestre de 2008
Professor: Newton José Vieira — DCC/ICEx/UFMG
Quarta Prova/Solução do professor — 23/06/2008

1. Resolva, justificando de forma bem clara:

   a) Desenhe um grafo simples com mais de um vértice, G, e seu complemento, G^c, com o menor número de vértices possível, tais que G e G^c tenham o mesmo número de arestas.
   b) Para que valores de n K_n é Euleriano e para que valores de n K_n é Hamiltoniano?

   Solução:

   a) O menor $n > 1$ tal que K_n tem um número par de arestas é 4 ($C(4, 2) = 6$ arestas). Assim, basta que G seja um subgrafo gerador de K_4 com a metade das arestas; e G^c será o subgrafo gerador de K_4 com a outra metade das arestas. Por exemplo:

   b) K_n é Euleriano quando n é ímpar, pois, neste caso, ele é um grafo em que todos os vértices têm grau par. K_n é Hamiltoniano sempre que $n \neq 2$.

2. Sobre quantidades de vértices e arestas:

   (a) Quantos vértices e arestas tem um grafo simples conexo regular de grau 3, se $E = 2V - 6$?
   (b) Quantas arestas tem um grafo simples com 2 componentes conexos, um de 15 vértices e outro com 16 vértices, ambos grafos regulares, um de grau 3 e outro de grau 4?

   Solução:

   (a) Como o grafo é simples conexo regular de grau 3, $3V = 2E$. Como $E = 2V - 6$, $3V = 4V - 12$. Logo, $V = 12$ e $E = 2 \times 12 - 6 = 18$.
   (b) O componente de 15 vértices não pode ter grau 3, pois teria um número ímpar de vértices de grau ímpar. Logo ele tem grau 4 e o outro tem grau 3. Assim, tem-se que $4 \times 15 + 3 \times 16 = 2E$. Logo, $E = (60 + 48)/2 = 54$.

3. Em certo grupo de 19 pessoas, sabe-se que:

   - todos os irmãos de cada pessoa participam do grupo;
   - cada pessoa tem pelo menos um irmão;
   - 10 pessoas têm um número ímpar de irmãos;
   - 9 pessoas têm um número par de irmãos.

   Se o grupo for particionado de maneira que todos os irmãos, e apenas irmãos, fiquem no mesmo subgrupo, quantos subgrupos serão formados:

   (a) no mínimo?
   (b) no máximo?

   Dê também os tamanhos dos subgrupos em cada caso.

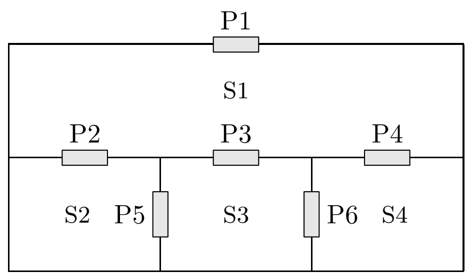
   Solução:

   Modelagem: a cada pessoa corresponde um vértice e se duas pessoas são irmãs, há uma aresta incidente aos vértices respectivos. Com isto, a cada subgrupo corresponde necessariamente um grafo completo (pois todos são irmãos entre si). Observe também que, como um grafo completo é regular, vértices de grau par devem pertencer a componentes diferentes daqueles que contêm vértices de grau ímpar.

(a) Como em K_{10} todos os vértice têm grau ímpar e em K_9 todos têm grau par, serão formados, no mínimo, 2 grupos, um de 10 e o outro de 9 pessoas.

(b) Os 10 vértices de grau ímpar podem formar 5 grafos K_2 (impossível formar mais grafos mantendo cada grau ímpar). E os 9 de grau par podem formar 3 grafos K_3 (é impossível formar mais grafos mantendo cada grau par). Logo, serão formados no máximo 8 grupos, 5 de duas pessoas e 3 de três pessoas.

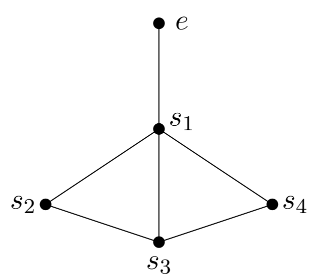
4. A seguir está desenhada uma construção com quatro salas, designadas por S1 a S4, interconectadas por seis portas, P1 a P6.



Determine o número mínimo de novas portas a instalar de forma que uma pessoa possa, ao chegar na construção, passar por cada porta exatamente uma vez e sair para o exterior. Justifique modelando o problema por meio de grafo. Em que locais devem ser instaladas as novas portas (se o número mínimo de novas portas for maior que zero)?

Solução:

Modelando o problema por meio de um grafo, obtém-se:



em que o vértice e corresponde à área externa, cada vértice s_i corresponde a uma sala Si e cada aresta a uma porta. O grafo tem trajeto Euleriano começando em e e terminando em s_3; por exemplo: $e\, s_1\, s_2\, s_3\, s_4\, s_1\, s_3$. Para obter um circuito Euleriano, basta colocar uma porta da sala S3 para o exterior, o que corresponde, no grafo a adicionar a aresta $\{e, s_3\}$, fazendo com que o grafo só tenha vértices de grau par. Com isto, um circuito Euleriano começando e terminando em e seria $e\, s_1\, s_2\, s_3\, s_4\, s_1\, s_3\, e$, o que corresponde a uma pessoa:

(a) entrar na sala S1 (porta P1);

(b) passar para a sala S2 (porta P2);

(c) passar para a sala S3 (porta P5);

(d) passar para a sala S4 (porta P6);

(e) passar para a sala S1 (porta P4);

(f) passar para a sala S3 (porta P3);

(g) sair para o exterior (porta nova).