Departamento de Ciência da Computação — ICEx/UFMG
Matemática Discreta — $2^{\underline{o}}$ semestre de 2013
Professor: Newton José Vieira — www.dcc.ufmg.br/~nvieira
Segunda Lista de Exercícios/Solução do professor

Combinatória Elementar

1. De quantas maneiras se pode arranjar as letras em GUARATINGUETA:

   (a) No total?
   (b) Com todos os As consecutivos?
   (c) Com todas as vogais consecutivas?
   (d) De forma que não existam (dois) A's consecutivos?

   Solução:

   Números de letras: 3 A, 2 G, 2 T, 2 U, 1 R, 1 I, 1 N, 1 E. Total: 13 letras.

   (a) $P(13; 3, 2, 2, 2, 1, 1, 1, 1) = 13!/(3!2!2!2!)$.
   (b) $P(11; 2, 2, 2, 1, 1, 1, 1) = 11!/(2!2!2!)$.
   (c) $P(7; 2, 2, 1, 1, 1) \times P(7; 3, 2, 1, 1) = [7!/(2!2!)] \times [7!/(3!2!)] = (7!7!)/(3!2!2!2!)$.
   (d) $P(10; 2, 2, 2, 1, 1, 1, 1) \times C(11, 3) = (C(11, 3) \times 10!)/(2!2!2!)$.

2. Determine o número de seleções de 6 bolas de sorvete a partir de bolas de 20 sabores diferentes, de forma que não sejam selecionadas mais de duas bolas com o mesmo sabor.

   Solução:

   1. Todas as 6 bolas de sabores diferentes: $C(20, 6)$;
   2. 2 bolas de mesmo sabor e 4 de sabores diferentes: $C(20, 1) \times C(19, 4)$;
   3. 2 bolas de um sabor, 2 bolas de outro sabor e 2 bolas de sabores diferentes dos dois primeiros e diferentes entre si: $C(20, 2)C(18, 2)$.
   4. 2 bolas de um sabor, 2 bolas de outro sabor e 2 bolas de um sabor diferentes dos dois primeiros: $C(20, 3)C(17, 0)$.

   Resposta: $C(20, 6) + C(20, 1)C(19, 4) + C(20, 2)C(18, 2) + C(20, 3)C(17, 0)$.

3. Em uma transferência (simultânea) de 12 bandidos de uma penitenciária para outra eles devem ser acompanhados cada um por um policial. Quantos grupos de 12 pares podem ser constituídos a partir dos 12 bandidos e 12 policiais?

   Solução: 12!.

4. Um batalhão de 50 soldados deve fazer 5 filas de 10 elementos. A única restrição é que os 5 maiores soldados devem encabeçar as 5 filas. Quantas possibilidades existem para isso?

   Solução: Retirando-se os 5 soldados maiores, os restantes 45 devem ser distribuídos dentre as 5 filas, uma para cada um dos maiores soldados. Resposta: 45!.

5. De quantas maneiras 5 homens e 5 mulheres podem ser dispostos lado a lado de forma que homens não fiquem juntos?

   Solução:

   1. Disposição das mulheres: 5!;

2. seleção de 5 posições dentre 6 para colocar os homens: $C(6,5)$;
3. disposição dos homens nas 5 posições escolhidas: $5!$.

Resposta: $5! \times 6 \times 5!$.

6. Uma fazendeiro produz laranjas de 5 diferentes qualidades. Supondo que ele vá selecionar 10 laranjas para presentear o vizinho, quantas seleções são possíveis:

   (a) Se uma seleção pode ser constituída de quaisquer qualidades de laranjas?
   (b) Se uma seleção deve ter pelo menos uma laranja de cada tipo?

   Solução:

   (a) $C(5-1+10,10) = C(14,10)$.
   (b) $C(5-1+5,5) = C(9,5)$.

7. Um grupo de estudos de 10 pessoas deve ser formado a partir de uma turma de 12 alunos e 6 alunas. De quantas maneiras é possível fazer essa formação, supondo que:

   (a) Deva haver exatamente 5 alunas no grupo?
   (b) Deva haver, no mínimo, 4 alunas no grupo?

   Solução:

   (a) $C(6,5)C(12,5)$.
   (b) $C(6,4)C(12,6) + C(6,5)C(12,5) + C(6,6)C(12,4)$.

8. Um grupo de 18 políticos deve formar um "trem da alegria", de forma que 3 deles viajem para Nova Iorque, 4 para Los Angeles, 5 para Orlando e 6 para Las Vegas. De quantas formas tal grupo pode ser assim particionado?

   Solução: $C(18;3,4,5,6) = 18!/(3!4!5!6!)$.

9. Se n objetos distintos são distribuídos em n caixas distintas, qual é a probabilidade que:

   (a) Nenhuma caixa fique vazia?
   (b) Exatamente uma caixa fique vazia?

   Solução: O número de distribuições de n objetos distintos em n caixas distintas é n^n. Segue-se:

   (a) Probabilidade: $n!/n^n$.
   (b)
      1. Escolhas para a caixa vazia: $C(n,1)$;
      2. Escolhas para a caixa com dois objetos: $C(n-1,1)$;
      3. Escolhas dos dois objetos para compartilhar uma caixa: $C(n,2)$.
      4. Distribuições dos $n-2$ objetos restantes em $n-2$ caixas distintas: $(n-2)!$.

      Resposta: $n(n-1)C(n,2)(n-2)!/n^n =$.

10. As 52 cartas do baralho são distribuídas em número igual para 4 pessoas distintas. Qual é a probabilidade que:

    (a) Cada pessoa receba um dos ases?
    (b) Uma pessoa receba todos os ases?

    Solução: O espaço amostral consta de $C(52;13,13,13,13) = 52!/(13!13!13!13!)$ distribuições possíveis.

(a) Cada pessoa recebe um dos ases em $P(4,4) \times C(48; 12, 12, 12, 12)$ distribuições. Logo a probabilidade é $[4! \times 48!/(12!12!12!12!]/[52!/(13!13!13!13!)] = (24 \times 13^4)/(52 \times 51 \times 50 \times 49) = (6 \times 13^3)/(51 \times 50 \times 49) \simeq 0,105$.

(b) Uma pessoa receba todos os ases em $C(4,1) \times C(48; 13, 13, 13, 9)$ distribuições. Logo a probabilidade é $[4 \times 48!/(13!13!13!9!)]/[52!/(13!13!13!13!)] = (12 \times 11 \times 10)/(51 \times 50 \times 49) \simeq 0,011$.

11. Quantas sequências ternárias de 30 dígitos têm exatamente dez 1s?

Solução:

1. Escolhas para as posições dos 10 1s: $C(30,10)$;
2. Distribuições de dígitos 0 e 2 nas 20 posições restantes: 2^{20}.

Resposta: $C(30,10)2^{20}$.

12. Escreva problemas equivalentes do tipo "soluções em inteiros de uma equação" para:

(a) O número de maneiras de distribuir r bolas idênticas em n caixas distintas com pelo menos k bolas na primeira caixa.

(b) O número de maneiras de distribuir r bolas idênticas em n caixas distintas de forma que nenhuma caixa contenha mais de duas bolas.

(c) O número de subconjuntos de três elementos de $\{A, B, C, D, E\}$.

(d) O número de maneiras de distribuir r bolas idênticas em n caixas distintas de forma que as primeiras duas caixas contenham um total de p bolas.

Solução:

(a) $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = r$, com $x_1 \geq k$ e $x_i \geq 0$ para $i \geq 2$.

(b) $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = r$, com $0 \leq x_i \leq 2$.

(c) $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 3$, com $x_i \in \{0, 1\}$.

(d) $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = r$, com $x_i \geq 0$ e $x_1 + x_2 = p$.

13. Encontrar o número de soluções em inteiros não-negativos para o sistema de equações:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 20 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 8 \end{array}\right\} \text{ com } x_k \geq 0$$

Solução: O número de soluções para $x_1 + x_2 + x_3 = 8$ com $x_k \geq 0$ é $C(3-1+8, 8)$. O número de soluções para $8 + x_4 + x_5 = 20$ é $C(2-1+12, 12)$. Logo, a resposta é: $C(3-1+8,8)C(2-1+12,12) = C(10,8)C(13,12) = [10 \times 9/2] \times 13 = 585$.

14. Qual é o coeficiente de x^{10} em $(1 - 2x - 3y)^{20}$?

Solução: $C(20; 10, 10, 0)1^{10}(-2)^{10}(-3)^0 = [20!/10!10!]2^{10}$.

15. Prove, por indução, que $C(n+1, r+1) = \sum_{k=r}^{n} C(k, r)$.

Solução: Para $n = r$, tem-se: $C(r+1, r+1) = 1 = C(r, r)$. Seja $n \geq r$ arbitrário. Suponha, como hipótese de indução, que $C(n+1, r+1) = \sum_{k=r}^{n} C(k, r)$. Tem-se:

$$\begin{array}{rcll} \sum_{k=r}^{n+1} C(k,r) & = & \sum_{k=r}^{n} C(k,r) + C(n+1,r) & \text{pela definição de somatória} \\ & = & C(n+1,r+1) + C(n+1,r) & \text{pela hipótese de indução} \\ & = & C(n+2,r+1) & \text{pela identidade de Pascal.} \end{array}$$

16. Prove, usando raciocínio combinatório:

(a) $\sum_{k=0}^{n} C(n,k)^2 = C(2n,n)$.

(b) $\sum_{k=0}^{r} C(m,k)C(n,r-k) = C(m+n,r)$.

Solução:

(a) Sejam A e B dois conjuntos disjuntos de tamanho n. $C(2n,n)$ é o número de subconjuntos de tamanho n de $A \cup B$. E:

- $C(n,0)^2 = C(n,0)C(n,n)$ é o número de subconjuntos de tamanho n de $A \cup B$, com 0 elementos de A e n elementos de B;
- $C(n,1)^2 = C(n,1)C(n,n-1)$ é o número de subconjuntos de tamanho n de $A \cup B$, com 1 elemento de A e $n-1$ elementos de B;
- $\vdots$
- $C(n,n)^2 = C(n,n)C(n,0)$ é o número de subconjuntos de tamanho n de $A \cup B$, com n elementos de A e 0 elementos de B.

(b) Sejam A e B dois conjuntos disjuntos, A de tamanho m e B de tamanho n. $C(m+n,r)$ é o número de subconjuntos de tamanho r de $A \cup B$. E:

- $C(m,0)C(n,r)$ é o número de subconjuntos de tamanho r de $A \cup B$, com 0 elementos de A e r elementos de B;
- $C(m,1)C(n,r-1)$ é o número de subconjuntos de tamanho r de $A \cup B$, com 1 elemento de A e $r-1$ elementos de B;
- $\vdots$
- $C(m,r)C(n,0)$ é o número de subconjuntos de tamanho r de $A \cup B$, com r elementos de A e 0 elementos de B.

17. Avalie, usando o teorema binomial:

(a) $\sum_{k=0}^{n} 2^k C(n,k)$.

(b) $\sum_{k=0}^{n} k3^k C(n,k)$.

Solução:

(a) Substituindo-se x por 2: $\sum_{k=0}^{n} 2^k C(n,k) = 3^n$.

(b) Derivando-se, multiplicando-se por x e substituindo-se x por 3: $\sum_{k=0}^{n} k3^k C(n,k) = 3n.4^{n-1}$.

Funções Geradoras

18. Apresente funções geradoras para:

(a) O número de sequências binárias de r dígitos.

(b) O número de multiconjuntos de r elementos tomados de $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$.

(c) O número de multiconjuntos de r elementos tomados de $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, nos quais cada elemento aparece pelo menos uma vez.

Solução:

(a) $1 + 2x + 2^2x^2 + 2^3x^3 + \cdots = \sum_{r \geq 0} 2^r x^r$.

(b) $C(n-1+0,0) + C(n-1+1,1)x + C(n-1+2,2)x^2 + C(n-1+3,3)x^3 + \cdots = \sum_{r \geq 0} C(n-1+r,r)x^r$.

(c) $C(n-1+0,0)x^n + C(n-1+1,1)x^{n+1} + C(n-1+2,2)x^{n+2} + \cdots = \sum_{r\geq n} C(n-1+r-n, r-n)x^r = \sum_{r\geq n} C(r-1, r-n)x^r$.

19. Apresente funções geradoras para os seguintes problemas de equações inteiras:

(a) $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = r$, com $x_1 + x_2 = 6$ e $x_k \geq 0$.

(b) $x_1 + x_2 + x_3 < r$, com $k \leq x_k < 2k$.

(c) $2x_1 + 3x_2 + 5x_3 = r$, com $x_k > k$.

Solução:

(a) O número de soluções para $x_1+x_2 = 6$, com $x_k \geq 0$, é $C(2-1+6, 6)$. Logo, o número de soluções é $C(7,6)$ multiplicado pelo número de soluções para $x_3 + x_4 + x_5 = r$, com $x_3, x_4, x_5 \geq 2$ ("distribuindo-se" 6 igualmente entre as variáveis). Assim, a função geradora é $C(7,6) \times (x^2 + x^3 + x^4 + \cdots)^3 = 7x^6(1 + x + x^2 + \cdots)^3$.

(b) O número de soluções é o mesmo que para $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = r$, com $1 \leq x_1 < 2$, $2 \leq x_2 < 4$, $3 \leq x_3 < 6$ e $x_4 \geq 1$. Assim, a função geradora é $x(x^2 + x^3)(x^3 + x^4 + x^5)(x + x^2 + x^3 + \cdots)$.

(c) O número de soluções é o mesmo que para $y_1 + y_2 + y_3 = r$, com $y_1 = 4, 6, 8, \ldots$, $y_2 = 9, 12, 15, \ldots$, $y_3 = 20, 25, 30, \ldots$. Assim, a função geradora é $(x^4 + x^6 + x^8 + \cdots)(x^9 + x^{12} + x^{15} + \cdots)(x^{20} + x^{25} + x^{30} + \cdots)$.

20. Encontre a função geradora para o número de maneiras em que o lançamento de 3 dados distintos pode produzir um soma de, no máximo, r.

Solução: O problema equivale a encontrar a função geradora para o número de soluções inteiras de $x_1 + x_2 + x_3 \leq r$, com $1 \leq x_k \leq 6$, que é o número de soluções inteiras para $x_1 + x_2 + x_3 + y = r$, com $1 \leq x_k \leq 6$ e $y \geq 0$. Assim, a função geradora é $(x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6)^3(1 + x + x^2 + \cdots)$.

21. Encontre os coeficientes dos seguintes termos:

(a) x^{24} em $(x^3 + x^4 + \cdots + x^{12})^4$.

(b) x^6 em $(x + x^2 + \cdots)^2(1 - x^3)^3$.

(c) x^5 em $(1 - x^2)^{12}/(1 - x)^3$.

Solução:

(a)

$$
\begin{aligned}
&(x^3 + x^4 + \cdots + x^{12})^4 \\
&\quad = x^{12}(1 + x^2 + x^3 \cdots + x^9)^4 = x^{12}(1 - x^{10})^4(1 + x + x^2 \cdots)^4 \\
&\quad = x^{12}(C(4,0) - C(4,1)x^{10} + C(4,2)x^{20} - C(4,3)x^{30} + C(4,4)x^{40}) \\
&\qquad\quad (C(4-1+0) + C(4-1+1,1)x + C(4-1+2,2)x^2 + \cdots)
\end{aligned}
$$

Coeficiente de x^{24}: $C(4,0)C(4-1+12,12) - C(4,1)C(4-1+2,2) = 415$.

(b)

$$
\begin{aligned}
&(x + x^2 + \cdots)^2(1 - x^3)^3 = x^2(1 + x + x^2 \cdots)^2(1 - x^3)^3 \\
&\quad = x^2(C(2-1+0) + C(2-1+1,1)x + C(2-1+2,2)x^2 + \cdots) \\
&\qquad (C(3,0) - C(3,1)x^3 + C(3,2)x^6 - C(3,3)x^9)
\end{aligned}
$$

Coeficiente de x^6: $C(2-1+4,4)C(3,0) - C(2-1+1,1)C(3,1) = -1$.

(c)

$$\begin{aligned}(1-x^2)^{12}/(1-x)^3 &= (1-x^2)^{12}(1+x+x^2\cdots)^3\\ &= (C(12,0)-C(12,1)x^2+C(12,2)x^4-\cdots+C(12,12)x^{24})\\ &\quad (C(3-1+0)+C(3-1+1,1)x+C(3-1+2,2)x^2+\cdots)\end{aligned}$$

Coeficiente de x^5: $C(12,0)C(3-1+5,5)-C(12,1)C(3-1+3,3)+C(12,2)C(3-1+1,1)=99$.

22. Encontre funções geradoras para os seguintes a_n:

(a) $a_n = 3n-4$.
(b) $a_n = n(n-1)$.
(c) $a_n = n^4$.
(d) $a_n = n^2 3^n$.

Solução:

(a) $a_n = 3n-4$.
FG para 1: $1/(1-x)$.
FG para n: $x(1/(1-x))' = x/(1-x)^2$.
FG para $3n$: $3x/(1-x)^2$.
FG para $3n-4$: $3x/(1-x)^2 - 4/(1-x) = (7x-4)/(1-x)^2$.

(b) $a_n = n(n-1)$.
FG para $n-1$: $x/(1-x)^2 - 1/(1-x) = (2x-1)/(1-x)^2$.
FG para $n(n-1)$: $x[(2x-1)/(1-x)^2]' = 2x^2/(1-x)^3$.

(c) $a_n = n^4$.
FG para n^2: $x[x/(1-x)^2]' = (x+x^2)/(1-x)^3$.
FG para n^3: $x[(x+x^2)/(1-x)^3]' = (x^3+4x^2+x)/(1-x)^4$.
FG para n^4: $x[(x^3+4x^2+x)/(1-x)^4]' = (x^4+11x^3+11x^2+x)/(1-x)^5$.

(d) $a_n = n^2 3^n$.
FG para 3^n: $1/(1-3x)$.
FG para $n3^n$: $x[1/(1-3x)]' = 3x/(1-3x)^2$.
FG para $n^2 3^n$: $x[3x/(1-3x)^2]' = 3x(1+3x)/(1-3x)^3$.

23. Use as funções geradoras do exercício anterior para avaliar as seguintes somas:

(a) $\sum_{k=0}^{n}(3k-4)$.
(b) $2\times 1 + 3\times 2 + \cdots + n(n-1)$.
(c) $\sum_{k=1}^{n} n^4$.
(d) $3 + 2^2 3^2 \cdots + n^2 3^n$.

Solução:

(a) FG para $3n-4$: $(7x-4)/(1-x)^2$.
FG para $\sum_{k=0}^{n}(3k-4)$: $(7x-4)/(1-x)^3 = (7x-4)[C(3-1+0)+C(3-1+1,1)x+C(3-1+2,2)x^2+\cdots]$. O coeficiente de x^n é $7C(3-1+n-1,n-1)-4C(3-1+n,n) = (n+1)(3n-8)/2$.

(b) FG para $n(n-1)$: $2x^2/(1-x)^3$.
FG para $\sum_{k=0}^{n}[k(k-1)]$: $2x^2/(1-x)^4 = 2x^2[C(4-1+0,0)+C(4-1+1,1)x+C(4-1+2,2)x^2+\cdots]$. O coeficiente de x^n é $2C(4-1+n-2,n-2) = 2C(n+1,n-2) = n(n^2-1)/3$.

(c) FG para n^4: $(x^4+11x^3+11x^2+x)/(1-x)^5$.
FG para $\sum_{k=0}^{n} k^4$: $(x^4+11x^3+11x^2+x)/(1-x)^6 = (x^4+11x^3+11x^2+x)[C(6-1+0,0)+C(6-1+1,1)x+C(6-1+2,2)x^2+\cdots]$. O coeficiente de x^n é $C(6-1+n-4,n-4)+11C(6-1+n-3,n-3)+11C(6-1+n-2,n-2)+C(6-1+n-1,n-1) = C(n+1,n-4)+11C(n+2,n-3)+11C(n+3,n-2)+C(n+4,n-1) = n(n+1)(6n^3+9n^2+n-1)/30$.

(d) FG para $n^2 3^n$: $3x(1+3x)/(1-3x)^3$.
FG para $\sum_{k=0}^{n}[k^2 3^k]$: $3x(1+3x)/(1-3x)^3(1-x)$. Decompondo em frações parciais, obtém-se $[3/(1-3x)^3]-[6/(1-3x)^2]+[9/2(1-3x)]-[3/2(1-x)] = 3(1+(3x)+(3x)^2+\cdots)^3-6(1+(3x)+(3x)^2+\cdots)^2+(9/2)(1+(3x)+(3x)^2+\cdots)-(3/2)(1+x+x^2+\cdots)$.
O coeficiente de x^n é $3C(3-1+n,n)3^n - 6C(2-1+n,n)3^n + (9/2)3^n - (3/2) = [3^{n+1}(n^2-n+1)-3]/2$.

24. Utilizando funções geradoras, determine o número de soluções inteiras para as seguintes equações:

(a) $x_1+x_2+x_3+x_4 = 10$, com $1 \le x_i \le 6$.
(b) $x_1+x_2+x_3 = 6$, com $1 \le x_1 \le 5$, $x_2 \ge 2$ e $x_3 \ge 3$.
(c) $x_1+x_2+x_3+x_4 \le 10$, com $1 \le x_i \le 10$.

Solução:

(a) Função geradora:

$$\begin{aligned}(x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6)^4 &= x^4(1+x+x^2+x^3+x^4+x^5)^4\\ &= x^4(1-x^6)^4(1+x+x^2+\cdots)^4\\ &= x^4(C(4,0)-C(4,1)x^6+C(4,2)x^{12}-C(4,3)x^{18}+C(4,4)x^{24})\\ &\quad (C(4-1+0)+C(4-1+1,1)x+C(4-1+2,2)x^2+\cdots)\end{aligned}$$

Coeficiente de x^{10}: $C(4,0)C(4-1+6,6)-C(4,1)C(4-1+0,0) = C(9,6)-4 = 80$.

(b) Função geradora: $(x+x^2+x^3+x^4+x^5)(x^2+x^3+\cdots)(x^3+x^4+\cdots) = x^6(1+x+x^2+x^3+x^4)(1+x+x^2+\cdots)^2 = x^6(1+x+x^2+x^3+x^4)[C(2-1+0,0)+C(2-1+1,1)x+C(2-1+2,2)x^2+\cdots)]$.
Coeficiente de x^6: $1\times 1\times C(1,0) = 1$.

(c) Função geradora: $(x+x^2+\cdots+x^{10})^4(1+x+x^2+\cdots) = x^4(1+x+x^2+\cdots+x^9)^4(1+x+x^2+\cdots) = x^4(1-x^{10})^4(1+x+x^2+\cdots)^5 = x^4[C(4,0)-C(4,1)x^{10}+C(4,2)x^{20}-C(4,3)x^{30}+C(4,4)x^{40}][C(5-1+0,0)+C(5-1+1,1)x+C(5-1+2,2)x^2+\cdots)]$.
Coeficiente de x^{10}: $C(4,0)C(5-1+6,6) = C(10,6) = 210$.

25. De quantas maneiras se pode distribuir 13 reais a 30 crianças, se cada criança recebe no máximo 2 reais?

Solução: A resposta é o número de soluções inteiras para $x_1+\cdots+x_{30} = 13$, com $x_i \le 2$. A função geradora é $(1+x+x^2)^{30} = (1+x+x^2+\cdots)^{30}(1-x^3)^{30} = [C(30-1+0,0)+C(30-1+1,1)x+\cdots][C(30,0)-C(30,1)x^3+C(30,2)x^6+\cdots+(-1)^{30}C(30,30)x^{90}]$.

Coeficiente de x^{13}: $C(30-1+1,1)C(30,12)-C(30-1+4,4)C(30,9)+C(30-1+7,7)C(30,6)-C(30-1+10,10)C(30,3)+C(30-1+13,13)C(30,0)$.

Atenção: falta conferir esta solução.

26. Quantas maneiras existem de distribuir 20 cédulas de 1 real a 10 meninas e r meninos, se cada menina recebe no mínimo 1 real e cada menino recebe no máximo 3 reais?

Solução: A resposta é o número de soluções inteiras para $x_1+\cdots+x_{10}+y_1+\cdots+y_r=20$, com $x_i \geq 1$ e $y_k \leq 3$. A função geradora é $(x+x^2+x^3+\cdots)^{10}(1+x+x^2+x^3)^r = x^{10}(1+x+x^2+\cdots)^{10}(1-x^4)^r(1+x+x^2+\cdots)^r = x^{10}(1-x^4)^r(1+x+x^2+\cdots)^{10+r} = x^{10}[C(r,0)-C(r,1)x^4+C(r,2)x^8-\cdots+(-1)^r C(r,r)x^{4r}][C(r+10-1+0,0)+C(r+10-1+1,1)x+\cdots]$.

Coeficiente de x^{20}: $C(r,0)C(r+10-1+10,10)-C(r,1)C(r+10-1+6,6)+C(r,2)C(r+10-1+2,2) = C(r+19,10)-rC(r+15,6)+(r(r-1)/2)C(r+11,2)$.

27. Use função geradora para encontrar o número de maneiras de pintar 20 quartos idênticos de um hotel com 5 cores, se existe tintas das cores azul, cor-de-rosa e verde suficientes para pintar no máximo 3 quartos (para cada uma das cores).

Solução: A função geradora é $(1+x+x^2+x^3)^3(1+x+x^2+\cdots)^2$. O coeficiente de x^{20}: $C(3,0)C(5-1+20,20)-C(3,1)C(5-1+16,16)+C(3,2)C(5-1+12,12)-C(3,3)C(5-1+8,8)$.

28. Quantas maneiras existem de selecionar $4r$ bolas a partir de $2r$ bolas vermelhas idênticas, $2r$ bolas verdes idênticas e $2r$ bolas brancas idênticas?

Solução: A resposta é o número de soluções inteiras para $x_1+x_2+x_3=4r$, com $0 \leq x_i \leq 2r$. A função geradora é $(1+x+x^2+\cdots+x^{2r})^3$. Isto é igual a $(1-x^{2r+1})^3(1+x+x^2+\cdots)^3$, que é igual a $[C(3,0)-C(3,1)x^{2r+1}+C(3,2)x^{4r+2}+C(3,3)x^{6r+3}] \times [C(3-1+0,0)+C(3-1+1,1)x+C(3-1+2,2)x^2+\cdots]$.

Coeficiente de x^{4r}: $C(3,0)C(3-1+4r,4r)-C(3,1)C(3-1+2r-1,2r-1)$.