Departamento de Ciência da Computação — ICEx/UFMG
Matemática Discreta — $2^{\underline{o}}$ semestre de 2013
Professor: Newton José Vieira — www.dcc.ufmg.br/~nvieira
Terceira Lista de Exercícios/Soluções

Relações de Recorrência

1. Um banco paga 4,5% de juros por ano. Além disso, ele paga um bônus de $100 reais no final de cada ano (após pagos os juros). Encontre uma relação de recorrência para o total pago após n anos, se o investimento inicial for de $200 reais.

   Solução:

   $a_0 = 200$;
   $a_n = 1,045a_{n-1} + 100$ para $n \geq 1$.

2. Encontre uma relação de recorrência para o número de sequências quaternárias de n dígitos:

   (a) sem 1's consecutivos.
   (b) com número par de 0's.

   Solução:

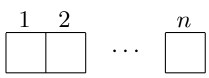
   (a) $a_0 = 1$, $a_1 = 4$;
   $a_n = 3a_{n-1} + 3a_{n-2}$ para $n \geq 2$.
   (b) $a_0 = 1$;
   $a_n = 3a_{n-1} + (4^{n-1} - a_{n-1}) = 2a_{n-1} + 4^{n-1}$ para $n \geq 1$.

3. Encontre uma relação de recorrência para o número de maneiras de colocar idênticos Toyotas, Cadillacs e Mercedes em um espaço cujo tamanho é n "unidades", sabendo que Mercedes e Cadillacs ocupam 2 unidades cada um, e que Toyotas ocupam uma unidade cada um.

   Solução:

   $a_1 = 1$, $a_2 = 3$;
   $a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2}$ para $n \geq 2$.

4. Considere n quadrados dispostos lado a lado, como mostra a figura:



   Seja a_n = *número de maneiras de colorir os quadrados, de forma que não fiquem dois quadrados vermelhos adjacentes*. Encontre uma relação de recorrência para a_n, para cada um dos seguintes casos:

   (a) Cada quadrado pode ser colorido de vermelho ou de verde.
   (b) Cada quadrado pode ser colorido de vermelho, de verde, ou de amarelo.
   (c) Generalize para k cores (incluindo vermelho).

   Solução:

   (a) $a_0 = 1$, $a_1 = 2$;
   $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ para $n \geq 2$.
   (b) $a_0 = 1$, $a_1 = 3$;
   $a_n = 2a_{n-1} + 2a_{n-2}$ para $n \geq 2$.

(c) $a_0 = 1$, $a_1 = k$;
$a_n = (k-1)a_{n-1} + (k-1)a_{n-2}$ para $n \geq 2$.

5. Encontre uma relação de recorrência para o número de maneiras de subir n degraus, se em cada estágio pudermos avançar 1, 3 ou 5 degraus de uma vez.

Solução:

$a_0 = 1$, $a_1 = 1$, $a_2 = 1$, $a_3 = 2$, $a_4 = 3$;
$a_n = a_{n-1} + a_{n-3} + a_{n-5}$ para $n \geq 5$.

6. Seja o conjunto de dígitos e letras $X = \{1, 2, 3, 4, a, b, c, d, e, f, g\}$. Encontre uma relação de recorrência para o número de sequências de n símbolos de X, para cada uma das seguintes situações:

(a) não há letras consecutivas (idênticas ou não).
(b) não há dígito seguido de letra.
(c) o número de letras é par.

Solução:

(a) não há letras consecutivas (idênticas ou não).
$a_0 = 1$, $a_1 = 11$, $a_n = 4a_{n-1} + 28a_{n-2}$ $(n \geq 2)$

(b) não há dígito seguido de letra.
$a_0 = 1$, $a_1 = 11$, $a_n = 4a_{n-1} + 49a_{n-2}$ $(n \geq 2)$

(c) o número de letras é par.
$a_0 = 1$, $a_n = 4a_{n-1} + 7(11^{n-1} - a_{n-1})$ $(n \geq 1)$, ou seja,
$a_0 = 1$, $a_n = 7.11^{n-1} - 3a_{n-1}$ $(n \geq 1)$

7. Encontre uma relação de recorrência para o número de sequências ternárias de n dígitos sem a subsequência 012.

Solução:

$a_0 = 1$, $a_1 = 3$, $a_2 = 9$;
$a_n = 2a_{n-1} + (a_{n-1} - a_{n-3}) = 3a_{n-1} - a_{n-3}$ para $n \geq 3$.

Obs: supondo que a_{n-1} seqs de $n-1$ dígitos não têm 012: a_{n-1} seqs de n dígitos terminam em 2 e podem ter 012 apenas como <u>sufixo</u>; logo, $a_{n-1} - a_{n-3}$ seqs de n dígitos não têm 012 (a_{n-3} é o número de seqs de $n-1$ dígitos sem 012, terminadas em 01).

8. Encontre uma relação de recorrência para o número de regiões criadas por n linhas sobre uma folha de papel se k das linhas são paralelas e cada uma das outras $n-k$ intersepta todas as linhas (e não mais de 2 linhas se interseptam em um único ponto).

Solução:

$a_k = k + 1$;
$a_n = a_{n-1} + n$ para $n \geq k + 1$.

9. Mostre que $C_1(1+\sqrt{5})^n + C_2(1-\sqrt{5})^n$ é a solução geral para $a_n - 2a_{n-1} - 4a_{n-2} = 0$.

Solução:

$$
\begin{aligned}
&C_1(1+\sqrt{5})^n + C_2(1-\sqrt{5})^n - 2[C_1(1+\sqrt{5})^{n-1} + C_2(1-\sqrt{5})^{n-1}] \\
&\qquad -4[C_1(1+\sqrt{5})^{n-2} + C_2(1-\sqrt{5})^{n-2}] \\
&= [C_1(1+\sqrt{5})^n - 2C_1(1+\sqrt{5})^{n-1} - 4C_1(1+\sqrt{5})^{n-2}]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\quad +[C_2(1-\sqrt{5})^n - 2C_2(1-\sqrt{5})^{n-1} - 4C_2(1-\sqrt{5})^{n-2}] \\
&= C_1(1+\sqrt{5})^{n-2}[(1+\sqrt{5})^2 - 2(1+\sqrt{5}) - 4] \\
&\quad +C_2(1-\sqrt{5})^{n-2}[(1-\sqrt{5})^2 - 2(1-\sqrt{5}) - 4] \\
&= C_1(1+\sqrt{5})^{n-2}[1+2\sqrt{5}+5-2-2\sqrt{5}-4] \\
&\quad +C_2(1-\sqrt{5})^{n-2}[1-2\sqrt{5}+5-2+2\sqrt{5}-4] \\
&= C_1(1+\sqrt{5})^{n-2}.0 + C_2(1-\sqrt{5})^{n-2}.0 \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

10. Resolva as seguintes relações de recorrência:

(a) $a_1 = 0$, $a_2 = 2$, $a_n + 5a_{n-1} + 6a_{n-2} = 0$ para $n \geq 3$.

(b) $a_0 = 1$, $a_1 = 2$, $a_n - 2a_{n-1} - a_{n-2} = 0$ para $n \geq 2$.

(c) $a_1 = 2$, $a_2 = 6$, $a_n - 4a_{n-1} + 4a_{n-2} = 0$ para $n \geq 3$.

(d) $a_1 = 5$, $a_2 = -5$, $a_n + 6a_{n-1} + 9a_{n-2} = 0$ para $n \geq 3$.

Solução:

(a) Equação característica: $x^2 + 5x + 6 = 0$. As raízes são $x_1 = -2$, $x_2 = -3$. Logo a solução geral é $C_1(-2)^n + C_2(-3)^n$. Para satisfazer as condições iniciais deve-se ter $C_1(-2)^1 + C_2(-3)^1 = 0$ e $C_1(-2)^2 + C_2(-3)^2 = 2$, ou seja:

$$
\begin{aligned}
&-2C_1 - 3C_2 = 0 \\
&4C_1 + 9C_2 = 2
\end{aligned}
$$

Resolvendo esse sistema, obtém-se $C_1 = -1$ e $C_2 = 2/3$. Logo, a solução da RR é $a_n = (-1)(-2)^n + (2/3)(-3)^n$.

(b) Equação característica: $x^2 - 2x - 1 = 0$. Raízes: $x_1 = 1 + \sqrt{2}$ e $x_2 = 1 - \sqrt{2}$. Logo a solução geral é $C_1(1+\sqrt{2})^n + C_2(1-\sqrt{2})^n$. Para satisfazer as condições iniciais deve-se ter $C_1(1+\sqrt{2})^0 + C_2(1-\sqrt{2})^0 = 1$ e $C_1(1+\sqrt{2})^1 + C_2(1-\sqrt{2})^1 = 2$, ou seja:

$$
\begin{aligned}
&C_1 + C_2 = 1 \\
&(1+\sqrt{2})C_1 + (1-\sqrt{2})C_2 = 2
\end{aligned}
$$

Assim, obtém-se $C_1 = (1+\sqrt{2})/2\sqrt{2}$ e $C_2 = -(1-\sqrt{2})/2\sqrt{2}$. Logo, a solução da RR é $[(1+\sqrt{2})^{n+1} - (1-\sqrt{2})^{n+1}]/2\sqrt{2}$.

(c) Solução da parte recorrente: $C_1 2^n + C_2 n 2^n$.

(d) Solução da parte recorrente: $C_1(-3)^n + C_2 n(-3)^n$.

11. Resolva as seguintes relações de recorrência:

(a) $a_0 = 1$, $a_n - 2a_{n-1} = n^2$ para $n \geq 1$.

(b) $a_0 = 1$, $a_1 = -1$, $a_n - 3a_{n-1} + 2a_{n-2} = n$ para $n \geq 2$.

(c) $a_0 = 1$, $a_1 = 0$, $a_n - 2a_{n-1} + a_{n-2} = 2$ para $n \geq 2$.

(d) $a_0 = 0$, $a_n + 3a_{n-1} = 2^n$ para $n \geq 1$.

(e) $a_1 = 0$, $a_2 = 0$, $a_n - 4a_{n-1} + 4a_{n-2} = (-2)^n$ para $n \geq 3$.

(f) $a_0 = 1$, $a_n + 2a_{n-1} = 2^n - n^2$ para $n \geq 1$.

(g) $a_0 = 2$, $a_n - 2a_{n-1} = 2^{n-1}$ para $n \geq 1$.

Solução:

Soluções das partes recorrentes:

(a) $g(n) = C_1 2^n$; $p(n) = -(n^2 + 4n + 6)$.

(b) $g(n) = C_1 + C_2 2^n$; $p(n) = -(n^2 + 5n)/2$.
(c) $g(n) = C_1 + C_2 n$; $p(n) = n^2$.
(d) $g(n) = C_1(-3)^n$; $p(n) = 2^{n+1}/5$.
(e) $g(n) = C_1 2^n + C_2 n 2^n$; $p(n) = (-2)^{n-2}$.
(f) $g(n) = C_1(-2)^n$; $p_1(n) = -(9n^2 + 12n + 2)/27$, $p_2(n) = 2^{n-1}$.
(g) $g(n) = C_1 2^n$; $p(n) = n2^{n-1}$.

12. Resolva as seguintes relações de recorrência:

(a) $a_1 = 1$, $a_n^3 = 2a_{n-1}^3 + 1$ para $n \geq 2$. (Sugestão: faça $b_n = a_n^3$.)
(b) $a_0 = 2$, $a_n = na_{n-1} + n!$ para $n \geq 1$.

Solução:

(a) $\sqrt[3]{2^n - 1}$.
(b) $(n + 2)n!$.

13. Usando relações de recorrência, avalie as seguintes somas:

(a) $1 + 2 + 4 + \cdots + 2^n$.
(b) $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2$.
(c) $1 \times 2 + 2 \times 3 + \cdots + n(n + 1)$.

Solução:

Basta resolver as relações de recorrência:

(a) $a_0 = 1$;
$a_n = a_{n-1} + 2^n$.
(b) $a_0 = 0$;
$a_n = a_{n-1} + n^2$.
(c) $a_0 = 0$;
$a_n = a_{n-1} + n^2 + n$.

Princípio de inclusão e exclusão

1. Numa cidade em que são publicados os jornais A, B e C, foram obtidos os seguintes resultados numa pesquisa: 20% da população lê o jornal A, 16% o jornal B, 14% o jornal C; 8% lê A e B, 5% A e C e 4% B e C. Somente 2% lê os três jornais. Qual a porcentagem da população que não lê nenhum destes três jornais?

Solução:

Sejam, considerando um universo, U, de 100 leitores:

- A: conjunto dos leitores do jornal A;
- B: conjunto dos leitores do jornal B; e
- C: conjunto dos leitores do jornal C.

São dados: $N(A) = 20$, $N(B) = 16$, $N(C) = 14$, $N(A \cap B) = 8$, $N(A \cap C) = 5$, $N(B \cap C) = 4$ e $N(A \cap B \cap C) = 2$.

$N(\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}) = N(U) - N(A \cup B \cup C) = 100 - (20 + 16 + 14 - 8 - 5 - 4 + 2) = 100 - 35 = 65$.
Logo, 65% da população não lê nenhum dos três jornais.

2. Dentre os números de 1 a 1000, inclusive, quantos são divisíveis por 2, 5 ou 12? Quantos não são divisíveis por 5, nem por 6, nem por 8?

Solução:

Seja, considerando o universo U dos números de 1 a 1000, D_i o conjunto dos números divisíveis por i. Então:

- $N(D_2 \cup D_5 \cup D_{12}) = N(D_2 \cup D_5)$, pois $D_{12} \subseteq D_2$. E $N(D_2 \cup D_5) = (1000/2 + 1000/5 - 1000/10 = 500 + 200 - 100 = 600$.
- $N(\overline{D_5} \cap \overline{D_6} \cap \overline{D_8}) = N(U) - N(D_5 \cup D_6 \cup D_8) = 1000 - [(1000/5 + 1000/6 + 1000/8) - (1000/30 + 1000/40 + 1000/24) + 1000/120] = 1000 - [(200 + 166 + 125) - (33 + 25 + 41) + 8] = 1000 - (491 - 99 + 8) = 1000 - 406 = 594$.

3. Encontre o número de sequências de tamanho k, tomadas do conjunto $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$, em que cada a_i aparece pelo menos uma vez em cada sequência.

Solução:

Seja U o conjunto de todas as sequências de k elementos do conjunto $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$. Seja S_i o conjunto das sequências de k elementos em que a_i aparece pelo menos uma vez. Pede-se $N(S_1 \cap S_2 \cap \ldots \cap S_n)$, que é igual a $N(U) - N(\overline{S_1} \cup \overline{S_2} \cup \ldots \cup \overline{S_n})$. Como:

- $N(U) = n^k$;
- $N(\overline{S_i}) = (n-1)^k$;
- $N(\overline{S_i} \cap \overline{S_j}) = (n-2)^k$ para $j \neq i$;
- etc.

tem-se:

$$N(S_1 \cap S_2 \cap \ldots \cap S_n) = n^k - [\binom{n}{1}(n-1)^k - \binom{n}{2}(n-2)^k + \cdots + (-1)^n \binom{n}{n}(n-n)^k].$$

Logo, $N(S_1 \cap S_2 \cap \ldots \cap S_n) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i C(n,i)(n-i)^k$.

4. Quantos arranjos existem das letras A,A,A,B,B,B,C,C,C, nos quais não apareçam 3 letras consecutivas idênticas?

Solução:

Sejam A o conjunto dos arranjos em que aparecem 3 As consecutivos, B o conjunto dos arranjos em que aparecem 3 Bs consecutivos e C o conjunto dos arranjos em que aparecem 3 Cs consecutivos.

Então, $N(\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}) = N(U) - N(A \cup B \cup C)$. Logo,

$$N(\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}) = P(9; 3, 3, 3) - (\binom{3}{1} P(7; 3, 3, 1) - \binom{3}{2} P(5; 3, 1, 1) + \binom{3}{3} P(3; 1, 1, 1)).$$

Portanto,

$$N(\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}) = \frac{9!}{3!^3} - (3\frac{7!}{3!^2} - 3\frac{5!}{3!} + 3!).$$

5. Usando o princípio da inclusão e exclusão, determine o número de soluções inteiras para $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 20$, se $-2 \leq x_k \leq 10$.

Solução:

O número de soluções é o mesmo que o de $y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 28$ com $0 \leq y_i \leq 12$. Seja Y_i o conjunto das "soluções" desta última em que $y_i \leq 12$, mas y_j, para $i \neq j$, podendo tomar qualquer valor a partir de 0 (inclusive maior que 12). Então, o número de soluções procurado é $N(Y_1 \cap Y_2 \cap Y_3 \cap Y_4)$. Tem-se:

$$N(Y_1 \cap Y_2 \cap Y_3 \cap Y_4) = \binom{4-1+28}{28} - [\binom{4}{1}\binom{4-1+15}{15} - \binom{4}{2}\binom{4-1+2}{2} + 0 - 0].$$

6. Uma companhia de sabão em pó oferece 3 tipos diferentes de cupons em suas caixas de sabão. Cada caixa contém um cupom; se você colecionar pelo menos um de cada tipo, voce ganha um brinde. Qual é a probabilidade de você ganhar um brinde, se você comprar 10 caixas? (A probabilidade é o número de distribuições possíveis em que aparece pelos um cupom de cada tipo, dividido pelo número total de distribuições possíveis.)

   Solução:

   Seja U o conjunto de todas as sequências dos números 1, 2 e 3. Seja C_i o conjunto das sequências dos números 1, 2 e 3 em que o número i ocorre pelo menos uma vez. Então a probabilidade pedida é $N(C_1 \cap C_2 \cap C_3)/N(U)$. Como $N(U) = 3^{10}$ e

$$N(C_1 \cap C_2 \cap C_3) = N(U) - N(\overline{C_1} \cap \overline{C_2} \cap \overline{C_3} = 3^{10} - [\binom{3}{1}2^{10} - \binom{3}{2}1^{10} + \binom{3}{3}0] = 3^{10} - 3.2^{10} + 3$$

   segue-se que a probabilidade será:

$$\frac{3^{10} - 3.2^{10} + 3}{3^{10}} = 1 - \frac{2^{10} - 1}{3^9}.$$

7. Oito pessoas entram em um elevador, no primeiro andar. O elevador descarrega passageiros em cada um dos andares seguintes (no mínimo, um passageiro por andar), até ficar vazio no quinto andar (após descarregar, no mínimo, um passageiro). Determine, usando o princípio da inclusão e exclusão, de quantas maneiras diferentes isto pode acontecer.

   Solução:

   Seja D_i o conjunto de distribuições das 8 pessoas em que o i-ésimo andar recebe pelo menos uma delas. Pede-se $N(D_2 \cap D_3 \cap D_4 \cap D_5)$. Tem-se:

$$N(D_2 \cap D_3 \cap D_4 \cap D_5) = 4^8 - [\binom{4}{1}3^8 - \binom{4}{2}2^8 + \binom{4}{3}1^8 - \binom{4}{4}0] = 4^8 - [4.3^8 - 6.2^8 + 4].$$

8. Em quantas permutações de 1,2,..., n, um número k nunca é imediatamente seguido de $k+1$?

   Solução:

   Seja P_i o conjunto de permutações em que k não é seguido de $k+1$. Pede-se $N(P_1 \cap P_2 \cap \ldots \cap P_{n-1})$. Tem-se:

$$N(P_1 \cap P_2 \cap \ldots \cap P_{n-1}) = n! - [\binom{n-1}{1}(n-1)! - \binom{n-1}{2}(n-2)! + \cdots + (-1)^n \binom{n-1}{n-1}0!],$$

   ou seja,

$$N(P_1 \cap P_2 \cap \ldots \cap P_{n-1}) = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \binom{n-1}{k}(n-k)!.$$

9. Quantas maneiras existem de arranjar as letras em REDIVIDERS de forma que apareça pelo menos um par de letras consecutivas idênticas?

Solução:

Apenas R, E, D e I podem ser repetidas. Seja R o conjunto dos arranjos em que aparece RR, E o conjunto dos arranjos em que aparece EE etc. Pede-se, então, $N(R \cup E \cup D \cup I)$. Tem-se:

$$N(R \cup E \cup D \cup I) = \binom{4}{1}\frac{9!}{2!^3} - \binom{4}{2}\frac{8!}{2!^2} + \binom{4}{3}\frac{7!}{2!} - \binom{4}{4}6!.$$

10. De quantas maneiras podemos permutar os dígitos 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 de forma que nenhum dígito par fique em sua posição natural?

Solução:

Seja A_p o conjunto dos arranjos em que o dígito par p aparece em sua posição natural. Pede-se, então, $N(\overline{A_2} \cap \overline{A_4} \cap \overline{A_6} \cap \overline{A_8})$ Tem-se:

$$N(\overline{A_2} \cap \overline{A_4} \cap \overline{A_6} \cap \overline{A_8}) = 9! - [\binom{4}{1}8! - \binom{4}{2}7! + \binom{4}{3}6! - \binom{4}{4}5!].$$