Departamento de Ciência da Computação | ICEx/UFMG
Matemática Discreta | $2^{\underline{o}}$ semestre de 2013
Professor: Newton José Vieira
Quarta Lista de Exercícios | Entrega: 25/11/2013.

Introdução à Teoria dos Grafos

1. Quantas arestas têm os grafos K_n^c e $K_{m,n}^c$?

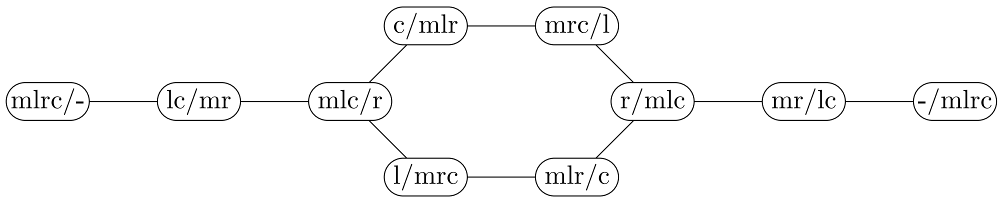
   Solução:

   K_n^c não tem arestas. $K_{m,n}^c$ tem $C(m+n,2) - mn = C(m,2) + C(n,2)$ arestas.

2. Uma mulher deve transportar um leão, uma raposa e um coelho de uma margem a outra de um rio, em um barco que só cabe a mulher e mais um dos animais. Se o leão e a raposa, ou a raposa e o coelho, ficarem na margem oposta em que estiver a mulher, em dado instante, o primeiro come o segundo (esse leão não gosta de coelho). Este problema pode ser modelado via grafos, criando-se um vértice para cada configuração segura (aquela em que ninguém come ninguém) possível, e uma aresta entre dois vértices se a configuração representada por um puder ser obtida daquela representada pelo outro cruzando-se o rio. Assim feito, um caminho simples do vértice inicial (que representa todos na margem A) ao vértice meta (todos na outra margem) corresponde a uma forma de cruzar o rio com os ditos elementos. Construa o grafo, e mostre todas as formas de cruzar o rio com segurança para a raposa e o coelho.

   Solução:

   Cada vértice terá a forma x/y, em que x é "-" ou uma sequência de símbolos m, l, r, c. A sequência x denota os elementos que estão na margem origem e y os elementos na margem destino (m: mulher, l: leão, r: raposa, c: coelho). Existirá uma aresta $\{x_1/y_1, x_2/y_2\}$, caso a situação representada por x_2/y_2 possa ser obtida a partir daquela representada por x_1/y_1. As arestas não são direcionadas, representando o fato de que se x_2/y_2 pode ser obtida a partir de x_1/y_1, então x_1/y_1 pode ser obtido a partir x_2/y_2 (como pode ser facilmente verificado). Com isto, o grafo será:



   Existem dois caminhos mais curtos que representam formas de cruzar o rio sem perdas:

   - mlrc/-, lc/mr, mlc/r, c/mlr, mrc/l, r/mcl, mr/cl, -/mlrc
   - mlrc/-, lc/mr, mlc/r, l/mrc, mlr/c, r/mcl, mr/cl, -/mlrc

3. Prove que um grafo simples com n vértices não pode ser bipartite se tiver mais de $n^2/4$ arestas. *Dica*: Suponha que pode ser bipartite. Então os vértices podem ser divididos em conjuntos de k e $n-k$ vértices. Conte o número de arestas.

   Solução:

Suponha que o grafo é bipartite. Então seus vértices podem ser divididos em dois conjuntos de k e $n-k$ vértices, de tal forma que vértices do mesmo conjunto não são adjacentes. Neste caso, o número máximo de arestas é $k \times (n-k)$ (o grafo seria do tipo $K_{k,n-k}$). O valor de k para o qual $k \times (n-k)$ atinge o máximo é dado por $d(k \times (n-k))/dk = 0$, ou seja, por $d(nk - k^2))/dk = 0$, ou ainda, $n - 2k = 0$, o que dá $k = n/2$. Assim, o número máximo de arestas é $(n/2) \times (n/2) = n^2/4$! Assim, tendo o grafo mais de $n^2/4$ arestas, ele não pode ser bipartite.

4. Qual é o maior número possível de arestas em um grafo com 31 vértices, se cada vértice tem grau, no máximo, igual a 3?

   Solução:

   Sabe-se que $\sum_{v \in V} grau(v) = 2|E|$. Como o número de vértices de grau ímpar é par, para satisfazer as condições do problema, basta ter $\sum_{v \in V} grau(v) = 30 \times 3 + 2 = 92$. Assim, tem-se que o número máximo de arestas é $|E| = 92/2 = 46$.

5. Prove que se G é um grafo com exatamente 2 vértices de grau ímpar, então ambos os vértices estão no mesmo componente conectado.

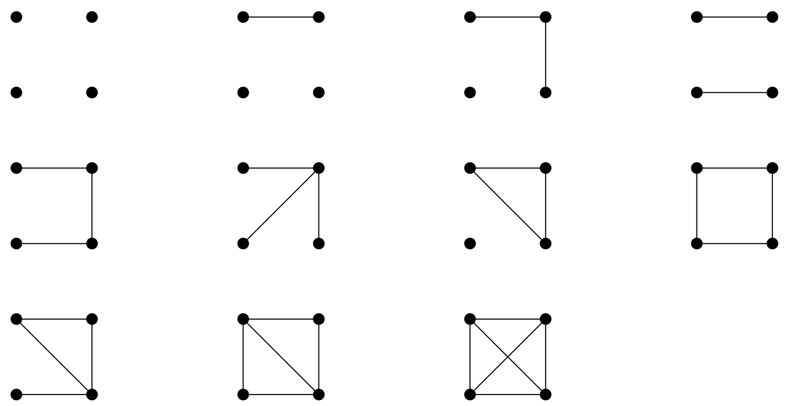
   Solução:

   Seja um grafo G com exatamente 2 vértices de grau ímpar. Já que o número de vértices de grau ímpar de um grafo é par, um componente de G, que também é um grafo, não pode ter apenas um dos dois vértices de grau ímpar. Logo, ambos devem estar no mesmo componente.

6. Desenhe todos os grafos simples de 4 vértices não isomorfos entre si.

   Solução:

   Abaixo estão listados os 11 grafos existentes:



7. Suponha que uma imersão do grafo simples G no plano tenha 20 faces. Se G é regular de grau 5, quantos vértices G contém?

   Solução:

   Como G é regular de grau 5, tem-se que $5|V| = 2|E|$. A fórmula de Euler diz que $|V| - |E| + F = 2$. Com isto, tem-se que $|V| - 5|V|/2 + 20 = 2$ e, portanto, $|V| = 12$.

8. Prove que se G é um grafo planar com k componentes, então qualquer imersão de G satisfaz $V - E + F = k + 1$.

Solução:

Sejam H_1, H_2, $\ldots$, H_k os k componentes de G ($k \geq 1$). Para cada componente H_i tem-se que $|V_{H_i}| - |E_{H_i}| + F_{H_i} = 2$. Portanto, tem-se que:

$$\sum_{i=1}^{k}(|V_{H_i}| - |E_{H_i}| + F_{H_i}) = 2k.$$

Mas, $\sum_{i=1}^{k}|V_{H_i}| = |V_G|$, $\sum_{i=1}^{k}|E_{H_i}| = |E_G|$ e $\sum_{i=1}^{k}F_{H_i} = F_G + (k-1)$; esta última se deve ao fato de que a face externa é contada uma vez para cada H_i. Logo,

$$|V_G| - |E_G| + F_G + (k-1) = 2k,$$

e, portanto, $|V_G| - |E_G| + F_G = k + 1$.

Caminhamentos

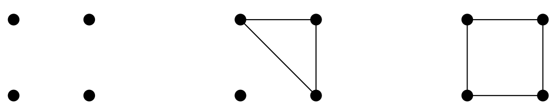
9. Liste todos os grafos simples de quatro vértices:

   (a) Eulerianos.

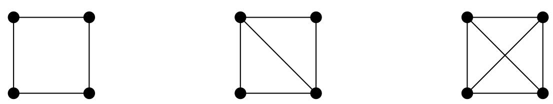
   (b) Hamiltonianos.

Solução:

(a) Eulerianos:



(b) Hamiltonianos:



10. Qual é o número mínimo de arestas a adicionar ao grafo de Königsberg, de forma que se obtenha um grafo Euleriano?

Solução:

A metade do número de vértices de grau ímpar: 2.

11. Para que valores de m e n são K_n e $K_{m,n}$ Eulerianos?

Solução:

K_n é Euleriano quando n é ímpar, pois, neste caso, todos os vértices têm grau par. $K_{m,n}$ é Euleriano quando m e n são pares.

12. Uma *ponte* em um grafo é uma aresta cuja remoção desconecta o grafo.

(a) Um grafo Euleriano pode conter uma ponte?
(b) Um grafo com trajeto Euleriano pode conter uma ponte?

Solução:

Um grafo Euleriano não pode conter uma ponte, mas um grafo com trajeto Euleriano pode.

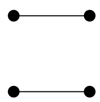
13. Desenhe, se possível, grafos simples com as seguintes características:

(a) O grafo tem um trajeto Euleriano e um caminho Hamiltoniano.
(b) O grafo não tem um trajeto Euleriano, nem caminho Hamiltoniano.

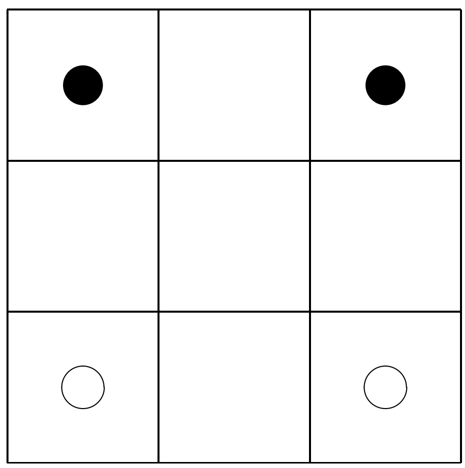
Solução:

(a) Grafo simples com trajeto Euleriano e caminho Hamiltoniano:

(b) Grafo simples sem trajeto Euleriano, nem caminho Hamiltoniano:



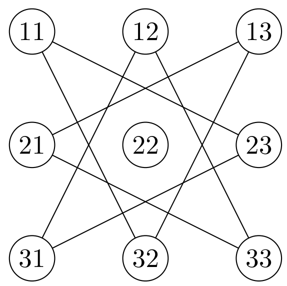
14. Seja o seguinte tabuleiro, em que ● representa um cavalo preto e ○ representa um cavalo branco:



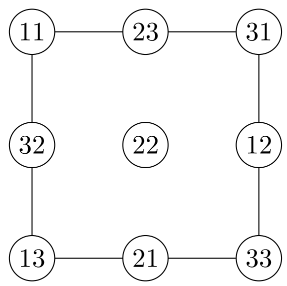
Lembrando que um cavalo (no jogo de xadrez) se move em L, modele o problema por meio de grafo e mostre como inverter as peças, isto é, colocar os cavalos pretos onde estão os brancos, e vice-versa.

Solução:

Modelando-se cada casa (i, j), para $1 \leq i, j \leq 3$ como um vértice de nome ij, e cada movimento possível do cavalo como uma aresta, tem-se o seguinte grafo:



Ao "desenrolar" este grafo partindo-se de 11, caminhando-se no sentido horário e desenhando-se os vértices, mantendo-se a disposição de 3 em cada linha, tem-se a seguinte nova disposição dos vértices e arestas do mesmo grafo:



Veja que há várias soluções possíveis, tanto os cavalos se movendo no sentido horário no grafo acima, como no sentido anti-horário. Evidentemente, há a restrição de que para um cavalo se mover para a posição explicitada pelo vértice adjacente, é necessário que não haja cavalo na mesma; se houver, este deve ser movido antes. Na solução seguinte, pode-se ver os 4 cavalos como se movendo "ao mesmo tempo" girando em sentido horário, cada um se movendo 4 vezes. A solução é apresentada em 4 linhas, cada linha representando o movimento, ao mesmo tempo, dos 4 cavalos. Cada coluna mostra o trajeto de um dos cavalos. O movimento do cavalo em i_1j_1 para a posição i_2j_2 é representado por $i_1j_1 \rightarrow i_2j_2$. Observe que os cavalos das posições 11 e 33 trocam de posição, assim como os cavalos das posições 13 e 31.

$11 \rightarrow 23$	$31 \rightarrow 12$	$33 \rightarrow 21$	$13 \rightarrow 32$
$23 \rightarrow 31$	$12 \rightarrow 33$	$21 \rightarrow 13$	$32 \rightarrow 11$
$31 \rightarrow 12$	$33 \rightarrow 21$	$13 \rightarrow 32$	$11 \rightarrow 23$
$12 \rightarrow 33$	$21 \rightarrow 13$	$13 \rightarrow 11$	$23 \rightarrow 31$

15. (a) Mostre que se G é um grafo simples com n vértices e pelo menos $C(n-1,2)+2$ arestas, então G é Hamiltoniano.

    (b) Mostre que (a) não é verdade se a condição é relaxada para "pelo menos $C(n-1,2)+1$ arestas".

Solução:

(a) O número máximo de arestas em um grafo simples de n vértices, ou seja, o número de arestas em K_n, é $C(n,2)$. Assim, o déficit máximo de arestas em G, com relação a K_n, é $C(n,2)-[C(n-1,2)+2] = C(n-1,2)+C(n-1,1)-C(n-1,2)-2 = n-3$. Assim, para dois vértices u e v quaisquer de G:

$$grau(u) + grau(v) \geq [(n-1)+(n-1)] - (n-3) - 1.$$

O primeiro termo é a soma dos graus de u e v em K_n, o segundo desconta o *máximo* possível de arestas, e o terceiro se deve ao fato de que a aresta $\{u, v\}$ é contada 2 vezes no primeiro termo e subtraída apenas uma vez no segundo termo. Fazendo-se as contas, tem-se que $grau(u) + grau(v) \geq n$. Assim, pela proposição 7-6 do livro texto, G é Hamiltoniano.

(b) O grafo $X = (\{a, b, c\}, \{\{a, b\}, \{b, c\}\})$ é um contra-exemplo, visto que $C(n-1, 2) + 1 = 2 = E$ e, no entanto, X não é Hamiltoniano.