Departamento de Ciência da Computação — ICEx/UFMG
Matemática Discreta — $2^{\underline{o}}$ semestre de 2013
Professor: Newton José Vieira
Exame Especial — 13/12/2013.

1. Uma sorveteria produz sorvetes de 10 sabores diferentes. Supondo que ela vá doar 100 sorvetes para as crianças de uma creche, quantos tipos de doações são possíveis:

   (a) Se a doação pode ser constituída de sorvetes de quaisquer sabores?

   (b) Se a doação deve ser conter pelo menos 2 sorvetes de cada sabor?

   Solução:

   (a) $C(10 - 1 + 100, 100)$.

   (b) $C(10 - 1 + 80, 80)$.

2. Utilizando funções geradoras, determine o número de soluções em inteiros para a equação:

   $$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 10, \text{ com } 1 \leq x_i \leq 10.$$

   Solução:

   Função geradora: $(x+x^2+\cdots+x^{10})^4(1+x+x^2+\cdots) = x^4(1+x+x^2+\cdots+x^9)^4(1+x+x^2+\cdots) = x^4(1-x^{10})^4(1+x+x^2+\cdots)^5 = x^4[C(4,0)-C(4,1)x^{10}+C(4,2)x^{20}-C(4,3)x^{30}+C(4,4)x^{40}][C(5-1+0,0)+C(5-1+1,1)x+C(5-1+2,2)x^2+\cdots]$.
   Coeficiente de x^{10}: $C(4,0)C(5-1+6,6) = C(10,6) = 210$.

3. Resolva a relação de recorrência:

   $$a_1 = 0,\ a_2 = 2,\ a_n + 5a_{n-1} + 6a_{n-2} = 0 \text{ para } n \geq 3.$$

   Solução:

   Equação característica: $x^2 + 5x + 6 = 0$. As raízes são $x_1 = -2$, $x_2 = -3$. Logo a solução geral é $C_1(-2)^n + C_2(-3)^n$. Para satisfazer as condições iniciais deve-se ter $C_1(-2)^1 + C_2(-3)^1 = 0$ e $C_1(-2)^2 + C_2(-3)^2 = 2$, ou seja:

   $$-2C_1 - 3C_2 = 0$$
   $$4C_1 + 9C_2 = 2$$

   Resolvendo esse sistema, obtém-se $C_1 = -1$ e $C_2 = 2/3$. Logo, a solução da RR é $a_n = (-1)(-2)^n + (2/3)(-3)^n = (-2)^{n+1} + (2/3)(-3)^n$.

4. Encontre o número de sequências de n dígitos decimais (0 a 9) em que cada dígito aparece pelo menos uma vez na sequência.

   Solução:

   Seja U o conjunto de todas as sequências de n dígitos decimais. Seja S_i o conjunto das sequências de n elementos em que o dígito i aparece pelo menos uma vez. Pede-se $N(S_0 \cap S_1 \cap \ldots \cap S_9)$, que é igual a $N(U) - N(\overline{S_0} \cup \overline{S_1} \cup \ldots \cup \overline{S_9})$. Como:

- $N(U) = 10^n$;
- $N(\overline{S_i}) = 9^n$;
- $N(\overline{S_i} \cap \overline{S_j}) = 8^n$ para $j \neq i$;
- etc.

tem-se:

$$N(S_0 \cap S_1 \cap \ldots \cap S_9) = 10^n - \left[\binom{10}{1}9^n - \binom{10}{2}8^n + \cdots + (-1)^{10}\binom{10}{10}(10-10)^n\right].$$

Logo, $N(S_0 \cap S_1 \cap \ldots \cap S_9) = \sum_{i=0}^{10}(-1)^i C(10,i)(10-i)^n$.

5. Qual é o maior número possível de arestas em um grafo com 31 vértices, se cada vértice tem grau, no máximo, igual a 3?

   Solução:

   Sabe-se que $\sum_{v \in V} grau(v) = 2|E|$. Como o número de vértices de grau ímpar é par, para satisfazer as condições do problema, basta ter $\sum_{v \in V} grau(v) = 30 \times 3 + 2 = 92$. Assim, o número máximo de arestas é $|E| = 92/2 = 46$.