Bacharelado em Ciência da Computação — DCC/ICEx/UFMG
Matemática Discreta/Turma M — $1^{\underline{o}}$ semestre de 1997
Professor: Newton José Vieira
<u>Primeira Prova</u> — 20/03/97

1. (3 pontos) Sejam A, B e C conjuntos. Prove que sim ou que não:
   (a) *se* $A \cup C = B \cup C$ *então* $A = B$
   (b) *se* $A \cap C = B \cap C$ *então* $A = B$
   (c) $A - B \subseteq C$ *se, e somente se,* $A - C \subseteq B$

2. (2 pontos) Suponha que uma relação de equivalência $\mathcal{R}$, sobre $A = \{1, 2, 3, \ldots, 15\}$, induza a seguinte partição de A (ou seja, tenha as seguintes classes de equivalência):

$$\{\{1\}, \{2, 3\}, \{4, 5, 6\}, \{7, 8, 9, 10\}, \{11, 12, 13, 14, 15\}\}$$

   Quantos elementos tem a relação $\mathcal{R}$?

3. (2 pontos) Dê correspondências um-para-um (funções bijetivas) entre:
   (a) $\mathbf{Z}-\mathbf{N}$ e $\mathbf{N}$
   (b) $\mathbf{Z}$ e $\mathbf{N}$
   (c) $\mathbf{N}$ e $\{n \in \mathbf{N} \ : \ n \geq 1000 \ \textit{e} \ n \ \textit{é par}\}$
   (d) $\mathbf{N}\times\mathbf{N}$ e $\mathbf{N}$

4. (3 pontos) Use o princípio do pombal (*pigeonhole principle*) para mostrar que, em um torneio de voleibol, em que cada equipe joga contra cada outra equipe exatamente 1 vez, se cada equipe ganhar pelo menos 1 jogo, então pelo menos 2 equipes terão o mesmo número de vitórias ao final do torneio. (Observe que, em voleibol, não existem empates.)

5. (3 pontos) Prove, por indução, que

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{i}{2^i} = 2 - \frac{n+2}{2^n}.$$

6. (3 pontos) Seja a sequência de números naturais $a_1, a_2, a_3, \ldots$, definida recursivamente assim:
   - $a_1 = 1$; e
   - $a_n = 2a_{\lfloor n/2 \rfloor}$, para $n \geq 2$.

   ($\lfloor x/y \rfloor$ é o maior inteiro menor ou igual a x/y.)

   Prove que $a_n \leq n$, para todo natural $n > 0$.