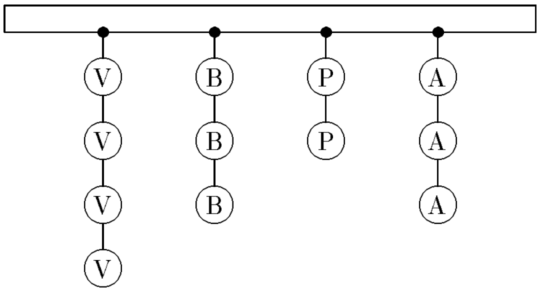
Bacharelado em Ciência da Computação — DCC/ICEx/UFMG
Matemática Discreta/Turma M — 1º semestre de 1997
Professor: Newton José Vieira
<u>Segunda Prova</u> — 17/04/97

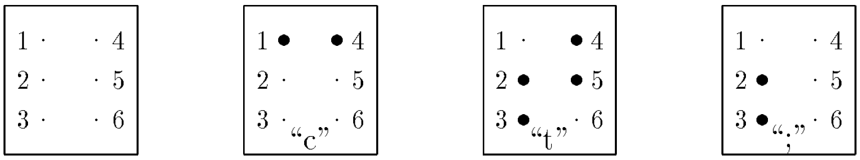
1. Doze pratos estão pendurados em 4 colunas, como mostra a seguinte figura:



Como se pode ver, existem 4 pratos vermelhos na primeira coluna, 3 brancos na segunda, 2 pretos na terceira e 3 azuis na quarta. Para ser admitida na equipe de tiro da sua Escola, Matilde tem que quebrar os 12 pratos usando um revólver e apenas 12 balas. Em certo instante, ela só pode quebrar o prato mais baixo de alguma coluna (ou seja, apenas 1 prato pode ser quebrado de cada vez). Sob estas condições,

   (a) de quantas maneiras pode Matilde quebrar os 12 pratos?
   (b) de quantas maneiras Matilde poderia quebrar os 12 pratos, quebrando inicialmente todos os vermelhos e pretos, antes de quebrar algum prato das outras cores?
   (c) de quantas maneiras Matilde poderia quebrar os 12 pratos sem quebrar 2 brancos consecutivamente?

2. No sistema Braille, um símbolo é representado por *pelo menos uma* saliência no arranjo de 6 pontos mostrados na parte (a) da seguinte figura:



(a) (b) (c) (d)

Assim, por exemplo, a letra "c" é representada por saliências nos pontos 1 e 4, como mostra a parte (b) da figura; a letra "t" é representada por saliências nos pontos 2, 3, 4, e 5, como mostra a parte (c); e o ";" é representado por saliências nos pontos 2 e 3, como mostra a parte (d).

(a) Quantos símbolos têm exatamente 3 saliências?

(b) Quantos símbolos têm um número par de saliências?

(c) Quantos símbolos podem ser representados no sistema Braille?

3. Quatro números devem ser selecionados do conjunto $\{-5, -4, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 4\}$. De quantas maneiras podem ser feitas as seleções de forma que o produto dos 4 números seja positivo e

   (a) os números selecionados sejam distintos?

   (b) cada número possa ser selecionado até 4 vezes?

   (c) cada número possa ser selecinado até 3 vezes?

4. O sargento Garcia deve distribuir 40 balas, 20 para rifles e 20 para revólveres, entre 4 oficiais, de forma que cada oficial receba no mínimo 2 e no máximo 7 balas de cada tipo. De quantas maneiras ele pode fazer a distribuição?

5. Avalie (ou seja, determine uma fórmula fechada para):

$$\sum_{k=0}^{n}[k \times C(n,k)].$$

Algumas identidades importantes:

- O coeficiente de x^r em $(a_0 + a_1x + \cdots)\ (b_0 + b_1x + \cdots)$ é $a_0b_r + a_1b_{r-1} + \cdots + a_rb_0$
- $(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n}\ C(n,k)\ x^k\ y^{n-k}$
- $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots$
- $(1 + x + x^2 + \cdots)^n = C(n-1+0,0) + C(n-1+1,1)\ x + \cdots + C(n-1+r,r)\ x^r + \cdots$
- $(1 + x + x^2 + \cdots + x^{m-1})^n = (1-x^m)^n\ (1 + x + x^2 + \cdots)^n$
- $(1-x^m)^n = \sum_{k=0}^{n}\ (-1)^k\ C(n,k)\ x^{km}$