Bacharelado em Ciência da Computação — DCC/ICEx/UFMG
Matemática Discreta — $1^{\underline{o}}$ semestre de 1997
Professor: Newton José Vieira
Primeira Lista de Exercícios/Solução

Fundamentos de Matemática

1. Dê dois conjuntos A e B tais que $A \neq B$ e $A \times B = B \times A$.

   Solução:
   $A \times B = B \times A$ e $A \neq B$ se, e somente se,
   $$(A = \phi \text{ e } B \neq \phi)\, ou\, (B = \phi \text{ e } A \neq \phi).$$

2. O que se pode dizer sobre os conjuntos A e B, caso:

   (a) $A \cup B = A$?
   (b) $A \cap B = A$?
   (c) $A - B = A$?
   (d) $A - B = B - A$?

   Solução:

   (a) $A \cup B = A$ se, e somente se, $B \subseteq A$.
   (b) $A \cap B = A$ se, e somente se, $A \subseteq B$.
   (c) $A - B = A$ se, e somente se, $A \cap B = \phi$.
   (d) $A - B = B - A$ se, e somente se, $A = B$.

3. Prove que

   (a) $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$.
   (b) $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$.

   Solução:

   (a) $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$.
   $$\begin{array}{ll} (x,y) \in A \times (B \cup C) & \text{se, e somente se, } x \in A \text{ e } y \in B \cup C \\ & \text{se, e somente se, } x \in A \text{ e } (y \in B \text{ ou } y \in C) \\ & \text{se, e somente se, } (x \in A \text{ e } y \in B) \text{ ou } (x \in A \text{ e } y \in C) \\ & \text{se, e somente se, } (x,y) \in A \times B \text{ ou } (x,y) \in A \times C \\ & \text{se, e somente se, } (x,y) \in (A \times B) \cup (A \times C) \end{array}$$

   (b) $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$.
   $$\begin{array}{ll} (x,y) \in A \times (B \cap C) & \text{se, e somente se, } x \in A \text{ e } y \in B \cap C \\ & \text{se, e somente se, } x \in A \text{ e } (y \in B \text{ e } y \in C) \\ & \text{se, e somente se, } (x \in A \text{ e } y \in B) \text{ e } (x \in A \text{ e } y \in C) \\ & \text{se, e somente se, } (x,y) \in A \times B \text{ e } (x,y) \in A \times C \\ & \text{se, e somente se, } (x,y) \in (A \times B) \cap (A \times C) \end{array}$$

4. Prove que $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A \cup B)$, mas não vice-versa, isto é, nem sempre $\mathcal{P}(A \cup B) \subseteq \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$.

   Solução:

- Provando que $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A \cup B)$:
  Seja $X \in \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$. Então $X \in \mathcal{P}(A)$ ou $X \in \mathcal{P}(B)$. Se $X \in \mathcal{P}(A)$ então $X \subseteq A$ e, portanto, $X \subseteq A \cup B$ e, assim, $X \in \mathcal{P}(A \cup B)$. Se $X \in \mathcal{P}(B)$ então $X \subseteq B$ e, portanto, $X \subseteq A \cup B$ e, assim, $X \in \mathcal{P}(A \cup B)$.
- Provando que nem sempre $\mathcal{P}(A \cup B) \subseteq \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$:
  Contra-exemplo: $A = \{a\}$, $B = \{b\}$.

5. Que propriedades (dentre reflexividade, simetria e transitividade) têm as seguintes relações?

   (a) *irmãos* sobre *Pessoas*.

   (b) $\subseteq$ sobre $\mathcal{P}(X)$ (X é um conjunto qualquer).

   (c) R sobre $\mathcal{P}(X)$ definida por: ARB se, e somente se, $A = \bar{B}$.

   (d) R sobre $\mathbf{N}$ definida por: aRb se, e somente se, b é divisível por a.

   Solução:

   (a) *irmãos* sobre *Pessoas*.
   Não reflexiva, simétrica, não transitiva.

   (b) $\subseteq$ sobre $\mathcal{P}(X)$ (X é um conjunto qualquer).
   Reflexiva, não simétrica, transitiva.

   (c) R sobre $\mathcal{P}(X)$ definida por: ARB se, e somente se, $A = \bar{B}$.
   Não reflexiva, simétrica, não transitiva.

   (d) R sobre $\mathbf{N}$ definida por: aRb se, e somente se, b é divisível por a.
   Reflexiva, não simétrica, transitiva.

6. Considere as seguintes relações de equivalência sobre o conjunto dos seres humanos:
   R_1: $xR_1y \Leftrightarrow x$ e y são do mesmo sexo
   R_2: $xR_2y \Leftrightarrow x$ e y têm a mesma data de aniversário
   Quantas classes de equivalência tem a partição induzida por cada uma delas?
   Solução:
   A partição induzida por R_1 tem 2 classes de equivalências, e a induzida por R_2 tem 366 classes de equivalência.

7. Considere a relação binária sobre $\mathbf{N}$ definida por: aRb se, e somente se, $a - b$ é divisível por 4.

   (a) Mostre que R é uma relação de equivalência.

   (b) Descreva a partição induzida por R.

   Solução:

   (a) R é uma relação de equivalência, pois:
   - é reflexiva: $a - a$ é divisível por 4 para todo $a \in \mathbf{N}$.
   - é simétrica: se $a - b$ é divisível por 4, é evidente que $-(a - b) = b - a$ é divisível por 4.
   - é transitiva: se $a - b$ é divisível por 4 e $b - c$ é divisível por 4, então $(a - b) + (b - c)$ é divisível por 4, ou seja, $a - c$ é divisível por 4.

   (b) Partição induzida por R: $\{E_0, E_1, E_2, E_3\}$, onde $E_k = \{4i + k : i \in \mathbf{N}\}$.

8. Classifique (ou seja, diga se são injetivas, etc.) as seguintes funções de $\mathbf{Z}$ para $\mathbf{Z}$:

(a) $f(n) = n - 1$

(b) $f(n) = |n| - 1$

(c) $f(n) = n^2 + 1$

(d) $f(n) = \lceil n/2 \rceil$

Solução:

(a) $f(n) = n - 1$: bijetiva.

(b) $f(n) = |n| - 1$: não injetiva, não sobrejetiva.

(c) $f(n) = n^2 + 1$: não injetiva, não sobrejetiva.

(d) $f(n) = \lceil n/2 \rceil$: não injetiva, sobrejetiva.

9. Dê uma correspondência um-para-um entre:

   (a) $\{x \in \mathbf{N} : x \text{ é ímpar}\}$ e $\{x \in \mathbf{N} : x \text{ é par}\}$.

   (b) $\{x \in \mathbf{N} : x \text{ é ímpar}\}$ e $\{x \in \mathbf{Z} : x < 0\}$.

   (c) $\mathbf{R}$ e $\{x \in \mathbf{R} : x > 0\}$.

   Solução:

   (a) $\{x \in \mathbf{N} : x \text{ é ímpar}\}$ e $\{x \in \mathbf{N} : x \text{ é par}\}$: função *sucessor*, do conjunto dos pares para o conjunto dos ímpares.

   (b) $\{x \in \mathbf{N} : x \text{ é ímpar}\}$ e $\{x \in \mathbf{Z} : x < 0\}$: $f(x) = -(x+1)/2$, sendo f uma função dos ímpares para os negativos.

   (c) $\mathbf{R}$ e $\{x \in \mathbf{R} : x > 0\}$: $f(x) = C^x$, onde C é uma constante positiva, sendo f uma função dos reais para os reais positivos.

10. Dê uma prova direta de que se n não é divisível por 3, então $n^2 + 2$ é divisível por 3.

    Solução:

    Suponha que n não é divisível por 3. Então n é da forma $3k+1$ ou $3k+2$. No primeiro caso, tem-se que $(3k+1)^2 + 2 = (9k^2 + 6k + 1) + 2 = 3(3k^2 + 2k + 1)$, divisível por 3. No segundo caso, tem-se que $(3k+2)^2 + 2 = (9k^2 + 12k + 4) + 2 = 3(3k^2 + 4k + 2)$, também divisível por 3.

11. Dê uma prova indireta de que se $x^2 + y^2 = z^2$, então pelo menos um, dentre x, y e z, é par.

    Solução:

    Suponha que x, y e z não sejam pares. Então sejam $x = 2k_1 + 1$ e $y = 2k_2 + 1$. Neste caso, $x^2 + y^2 = (2k_1+1)^2 + (2k_2+1)2 = (4k_1^2 + 4k_1 + 1) + (4k_2^2 + 4k_2 + 1) = 2(2k_1^2 + 2k_2^2 + 2k_1 + 2k_2 + 1)$, o que contraria a suposição de que z não é par.

12. Prove que um número inteiro n é ímpar se, e somente se, n^2 é ímpar. Diga que método(s) de prova utilizou.

    Solução:

    - Prova direta de "se n é ímpar, então n^2 é ímpar":
      Seja n ímpar. Então $n = 2k+1$ e, neste caso, $n^2 = (2k+1)^2 = 4K^2 + 4k + 1 = 2(2k+2) + 1$; portanto n^2 é ímpar.

    - Prova indireta de "se n^2 é ímpar, então n é ímpar":
      Seja n par. Então $n = 2k$ e, neste caso, $n^2 = (2k)^2 = 4K^2 = 2(2k)$; portanto n^2 é par.

13. Dê uma prova por contradição de que $\log_2 5$ é irracional.

    Suponha que $\log_2 5$ é racional. Então existem $x, y \in \mathbf{Z}$ tais que $\log_2 5 = x/y$. Assim, $\log_2 5^y = x$, ou ainda, $2^x = 5^y$, o que não pode ser o caso, pois 2^x só pode ser par e 5^y só pode ser ímpar.

14. Prove que é verdadeiro ou falso: "todo inteiro positivo pode ser escrito como a soma dos quadrados de dois números inteiros".

    Solução:

    A afirmação é falsa, visto que 3 não pode ser escrito como a soma dos quadrados de dois inteiros.

15. Dê uma prova construtiva de: "para todo inteiro positivo n, existe um inteiro divisível por mais de n primos".

    Solução:

    Sejam os $n+1$ primeiros números primos $p_1, p_2, \ldots, p_{n+1}$. O número $p_1 \times p_2 \times \cdots \times p_{n+1}$ é divisível por mais de n primos.

16. Use o princípio do pombal (*Pigeonhole principle*) para provar que:

    (a) Em qualquer grupo de $m \geq 2$ pessoas existem 2 pessoas com o mesmo números de amigos no grupo. (Observe que siclano é amigo de beltrano $\Leftrightarrow$ beltrano é amigo de siclano.)

    (b) Supondo que uma certa empresa tem 6 computadores, cada um conectado a zero ou mais dos outros computadores, então existem no mínimo 2 computadores diretamente conectados ao mesmo número de computadores.

    (c) Qualquer conjunto de 7 números inteiros distintos contém dois números cuja soma ou diferença é múltiplo de 10.

    Solução:

    (a) Em qualquer grupo de $m \geq 2$ pessoas existem 2 pessoas com o mesmo números de amigos no grupo.

    Suponha que exista uma pessoa sem amigos; neste caso, cada pessoa só pode ter de 0 a $m-2$ amigos (ninguém é amigo de pessoa que não tem amigos, nem de si mesmo). Por outro lado, se toda pessoa tem amigo, então cada pessoa pode ter de 1 a $m-1$ amigos. Nos dois casos, pelo princípio do pombal, existem 2 pessoas com o mesmo número de amigos.

    (b) Supondo que uma certa empresa tem 6 computadores, cada um conectado a zero ou mais dos outros computadores, então existem no mínimo 2 computadores diretamente conectados ao mesmo número de computadores.

    Análogo ao acima (ao invés de pessoas temos computadores, ao invés de amizade temos conexão, e $m = 6$).

    (c) Qualquer conjunto de 7 números inteiros distintos contém dois números cuja soma ou diferença é múltiplo de 10.

    Considere as representações decimais dos números. A diferença entre dois números é múltiplo de 10 se, e somente se, ambos terminam com o mesmo dígito. Por outro lado, a soma de dois números é múltiplo de 10 se, e somente se, ambos terminam em 0, ou um termina em 1 e o outro em 9, ou um termina em 2 e outro em 8, e assim por diante. Isto nos dá as seguintes "casas":

    $$[0], [1, 9], [2, 8], [3, 7], [4, 6], [5]$$

    Ao se colocar 7 números nestas 6 casas, de acordo com seu dígito final, tem-se que 2 deles, no mínimo, serão colocados na mesma casa.