Bacharelado em Ciência da Computação — DCC/ICEx/UFMG
Matemática Discreta — $1^{\underline{o}}$ semestre de 1997
Professor: Newton José Vieira
Nona Lista de Exercícios/Solução

Árvores e Grafos Direcionados

1. Quantos vértices tem uma árvore enraizada m-ária completa de altura h?

   Solução:

   Uma relação de recorrência para este problema seria: $a_0 = 1$; $a_h = ma_{h-1} + 1$, para $h \geq 1$ (uma árvore m-ária completa de altura h, maior que 0, consta da raiz mais m árvores m-árias completas de altura $h - 1$). A solução é $(m^{h+1} - 1)/(m - 1)$.

2. Dê dois exemplos de grafos satisfazendo $V_G = E_G + 1$, um com 2 e outro com 3 vértices, que não são árvores.

   Solução:

   Com dois vértices: $V = \{a, b\}$, $E = \{\{a, a\}\}$. Com três vértices: $V = \{a, b, c\}$, $E = \{\{a, b\}, \{a, b\}\}$.

3. Uma *floresta* é um grafo cujos componentes são árvores.

   (a) Quantas arestas há em uma floresta com n vértices e k componentes?

   (b) Qual é o número máximo de vértices em um grafo com 10 arestas e 3 componentes?

   Solução:

   (a) Número de arestas em uma floresta com n vértices e k componentes.
   Para cada árvore A_i, $1 \leq i \leq k$, tem-se que $V_{A_i} = E_{A_i} + 1$. Logo, para a floresta tem-se $V = E + k$.

   (b) Qual é o número máximo de vértices em um grafo com 10 arestas e 3 componentes?
   O número máximo de vértices consegue-se com uma floresta constituída de 3 árvores. Portanto, este número será $V = 10 + 3 = 13$.

4. Seja T uma árvore estritamente m-ária enraizada. Prove:

   (a) Se T tem k vértices internos, então tem $(m - 1)k + 1$ folhas.

   (b) Se T tem k folhas, então tem $(k - 1)/(m - 1)$ vértices internos e $(mk - 1)/(m - 1)$ vértices no total.

   (c) Se T tem n vértices no total, então tem $(n - 1)/m$ vértices internos e $\frac{(m-1)n+1}{m}$ folhas.

   Solução:

   (a) Se T tem k vértices internos, então tem $mk+1$ vértices no total (os que são filhos dos vértices internos, mais a raiz). Logo, tem $mk + 1 - k$ folhas, ou seja, $(m - 1)k + 1$ folhas.

   (b) Seja T com k folhas. Se T tem i vértices internos, então o número total de vértices de T é $mi + 1 = i + k$. Logo, T tem $(k - 1)/(m - 1)$ vértices internos; e $(k - 1)/(m - 1) + k = (mk - 1)/(m - 1)$ vértices no total.

   (c) Seja T com n vértices no total. Se T tem i vértices internos, então $mi + 1 = n$ e, portanto, T tem $i = (n - 1)/m$ vértices internos. O número de folhas é $n - (n - 1)/m = \frac{(m-1)n+1}{m}$ folhas.

5. Mostre que um grafo conexo é uma árvore se, e somente se, tem menos arestas do que vértices.

   Solução:

   ($\rightarrow$) Se um grafo G é uma árvore, então tem menos arestas do que vértices, já que $V_G = E_G + 1$.

   ($\leftarrow$) Suponha que um certo grafo conexo G tenha menos arestas que vértices, ou seja, $V_G = E_G + k$, para $k \geq 1$. Se $k = 1$, sabe-se que G é uma árvore. E se $k > 1$, então G não é conexo, o que pode ser provado facilmente.

6. Sejam n moedas, onde n é potência de 3. As moedas têm exatamente o mesmo peso, exceto uma, que é mais leve que as outras. Tem-se uma balança de pratos, em que se pode comparar os pesos de 2 coleções de moedas quaisquer. Usando árvores ternárias (3-árias), descreva um procedimento para encontrar a moeda defeituosa, que use $log_3 n$ pesadas para encontrar a moeda. O que acontece se o número de moedas não é potência de 3?

   Solução:

   Uma árvore ternária pode ser definida assim:

   - o conjunto de moedas original constitui a raiz da árvore;
   - se um vértice X é um conjunto unitário, é folha; caso contrário, tem 3 filhos M_1, M_2 e M_3, que são conjuntos de mesmo tamanho, que particionam X.

   Um procedimento para encontrar a moeda defeituosa em $log_3 n$ pesadas:

   $X \leftarrow$ *raiz da árvore*;
   enquanto X não unitário **faça**
       sejam M_1, M_2 e M_3 os filhos de X;
       coloque M_1 em um prato da balança, e M_2 no outro;
       se M_1 é mais leve que M_2 **então**
           $X \leftarrow M_1$
       senãose M_2 é mais leve que M_1 **então**
           $X \leftarrow M_1$
       senão
           $X \leftarrow M_3$
       fimse
   fimenquanto

   Quando X for unitário, conterá a moeda defeituosa.

   Se o número de moedas não for potência de 3, em certos pontos não será possível dividir X (na definição acima) em 3 conjuntos de mesmo tamanho; mas, de qualquer forma, a altura da árvore será $\lceil log_3 n \rceil$, sendo que alguns vértices podem ficar com nível $\lfloor log_3 n \rfloor$.

7. Em um grafo direcionado $G = (\mathbf{V}, \mathbf{E})$, $\sum_{v \in \mathbf{V}} gent(v) = \sum_{v \in \mathbf{V}} gsai(v)$?

   Solução:

   Sim. Cada aresta contribui com 1 unidade para ambas as somatórias.

8. Desenhe todos os grafos direcionados de 3 vértices não isomorfos, sem laços, e com no máximo uma aresta em qualquer direção.

   Solução:

   Seguem as arestas dos 16 grafos:

Número de arestas	Arestas	Total
0	$\{\}$	1
1	$\{(a,b)\}$	1
2	$\{(a,b),(b,a)\},\{(a,b),(b,c)\},\{(a,b),(a,c)\},\{(a,b),(c,b)\}$	4
3	$\{(a,b),(b,a),(b,c)\},\{(a,b),(b,a),(c,b)\},$	
	$\{(a,b),(b,c),(c,a)\},\{(a,b),(b,c),(a,c)\}$	4
4	$\{(a,b),(b,a),(b,c),(c,b)\},\{(a,b),(b,a),(b,c),(c,a)\},$	
	$\{(a,b),(b,a),(a,c),(b,c)\},\{(a,b),(b,a),(c,a),(c,b)\}$	4
5	$\{(a,b),(b,a),(b,c),(c,b),(a,c)\}$	1
6	$\{(a,b),(b,a),(b,c),(c,b),(a,c),(c,a)\}$	1

9. Lembre-se do paradoxo do jornalista esportivo. Em termos dos times, o que significa dizer que não há grupos sumidouros no grafo correspondente?

   Solução:

   O conjunto dos times não pode ser particionado em dois grupos A e B, de forma que os times do grupo A não tenham perdido para os do grupo B.

10. Um certo jogo de dois jogadores começa com uma pilha vazia. Os jogadores se alternam colocando 1, 2 ou 3 moedas de 1 centavo na pilha. O vencedor é o jogador que coloca o décimo sexto centavo. Descreva o jogo em termos de grafos direcionados. Mostre que o segundo jogador tem uma estratégia vencedora.

    Solução:

    Cada vértice n representará uma pilha de n centavos. Cada aresta (u, v) representará que v pode ser obtida de u. Assim, o jogo começa no vértice 0, vez do primeiro jogador. Estando-se no vértice n $(0 \leq n \leq 15)$, vez de um certo jogador, se o jogador joga i centavos, caminha-se para o vértice $n + i$, e a vez é do outro jogador.

    Para vencer, basta ao segundo jogador obter uma pilha de 4 centavos, qualquer que seja a jogada do primeiro (1, 2 ou 3 centavos); depois, obter uma pilha de 8 centavos, qualquer que seja a jogada do primeiro jogador; e assim, sucessivamente, obter 12, e depois 16.

11. Enuncie e prove versões apropriadas do Lema do Aperto de Mãos para grafos direcionados.

    Solução:

    $$\sum_{v \in \mathbf{V}} gent(v) = \sum_{v \in \mathbf{V}} gsai(v) = |E|$$

    O resultado é imediato, visto que cada aresta contribui com 1 unidade para ambas as somatórias.

12. Um grafo direcionado tem uma *ordem topológica* se seus vértices podem ser colocados em uma ordem $v_1, v_2, \ldots, v_n$, de forma que se (v_i, v_j) é aresta, então $i < j$. Prove que um grafo tem uma ordem topológica se, e somente se, não tem ciclos direcionados. (Sugestão: Para a "parte do se", mostre que se G não tem ciclos, então existe algum vértice com grau de entrada 0. Chame-o de v_1, remova-o, e continue.)

    Solução:

    $(\rightarrow)$ Se um grafo tem uma *ordem topológica*, então não tem ciclos, pois um ciclo $u_1, u_2, \ldots, u_n$ implicaria que u_1 viria após o próprio u_1 (pois $u_n = u_1$), o que não é possível.

    $(\leftarrow)$ Seja um grafo, G, acíclico. Algum vértice de G tem grau de entrada 0. Se assim não fosse, para um certo vértice u existiria uma aresta (u', u), para u' existira (u'', u'), e assim por diante. Mas, o número de vértices de G é finito, e portanto algum vértice teria que ser repetido, constituindo-se um ciclo. Coloque este vértice de grau zero como o primeiro, e retire-o do grafo; pegue um novo vértice de grau zero (do novo grafo), coloque-o como o segundo, e retire-o do grafo; e assim por diante.