Bacharelado em Ciência da Computação — DCC/ICEx/UFMG
Matemática Discreta — 2º semestre de 1997
Professor: Newton José Vieira
Lista de Exercícios: **Funções Geradoras**

1. Seja $f(x)$ a função geradora para a_r. Mostre que:
   (a) $(1 + x + x^2 + \cdots)f(x)$ é a função geradora para $a_0 + a_1 + \cdots + a_r$.
   (b) $xf'(x)$ é a função geradora para ra_r, onde $f'(x)$ é a derivada de $f(x)$.

2. Apresente funções geradoras para os seguintes problemas de equações inteiras:
   (a) $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = r$, com x_1, x_2, x_3 ímpares e x_2, x_4 pares.
   (b) $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = r$, com $x_1 + x_2 = 6$ e $x_k \geq 0$.
   (c) $2x_1 + 3x_2 + 5x_3 = r$, com $x_k > k$.

3. Encontre a função geradora para o número de maneiras em que o lançamento de 3 dados distintos pode produzir um soma de, no máximo, r.

4. Encontre os coeficientes dos seguintes termos:
   (a) x^5 em $(1 + x + x^2 + \cdots)(1 + x + x^2 + \cdots)$.
   (b) x^{24} em $(x^3 + x^4 + \cdots + x^{12})^4$.
   (c) x^6 em $(x + x^2 + \cdots)^2(1 - x^3)^3$.
   (d) x^5 em $(1 - x^2)^{12}/(1 - x)^3$.
   (e) x^r em $(1 + x + x^2 + \cdots)^r/(1 - x)^r$.

5. Encontre funções geradoras (FG's) para os seguintes a_n:
   (a) $a_n = 12$.
   (b) $a_n = 3n - 4$.
   (c) $a_n = n(n - 1)$.
   (d) $a_n = n^4$.
   (e) $a_n = n^2 3^n$.

6. Use as funções geradoras do exercício anterior para avaliar as seguintes somas:
   (a) $12 + 12 + \cdots + 12$ (n+1 vezes).
   (b) $-4 + -1 + 2 + \cdots + (3n - 4)$.
   (c) $2 \times 1 + 3 \times 2 + \cdots + n(n - 1)$.
   (d) $1^4 + 2^4 + \cdots + n^4$.

(e) $3 + 2^2 3^2 \cdots + n^2 3^n$.

7. Utilizando funções geradoras, determine o número de soluções inteiras para as seguintes equações:

   (a) $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 10$, com $1 \leq x_i \leq 6$.

   (b) $x_1 + x_2 + x_3 = 6$, com $1 \leq x_1 \leq 5$, $x_2 \geq 2$ e $x_3 \geq 3$.

   (c) $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 10$, com $1 \leq x_i \leq 10$.

8. De quantas maneiras se pode distribuir r moedas idênticas a 20 crianças, se cada criança recebe no mínimo 1, mas não mais que 4 moedas?

9. De quantas maneiras se pode selecionar 7 inteiros não consecutivos de $\{1, 2, 3, \ldots, 50\}$?

10. Quantas maneiras existem de distribuir 20 cédulas de 1 real a 10 meninas e r meninos, se cada menina recebe no mínimo 1 real e cada menino recebe no máximo 3 reais?

11. Use função geradora para encontrar o número de maneiras de pintar 20 quartos idênticos de um hotel com 5 cores, se existe tintas das cores azul, cor-de-rosa e verde suficientes para pintar no máximo 3 quartos (para cada uma destas cores).

12. De quantas maneiras se pode distribuir $2n$ bolas idênticas em 4 caixas distintas, de forma que nenhuma caixa contenha mais que n bolas?