Bacharelado em Ciência da Computação	DCC/ICEx/UFMG
Matemática Discreta	2º semestre de 1997
Professor: Newton José Vieira	
Lista de Exercícios de Relações de Recorrência/Solução parcial	

1. Um certo banco está cobrando 5% de juros ao mês. Tadeu tomou emprestados R\$1.000,00, e deve pagar prestações mensais fixas de R\$100,00 (a primeira ao final do primeiro mês de empréstimo). Encontre uma relação de recorrência para a dívida de Tadeu ao final do n-ésimo mês.

   Solução:

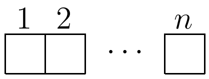
   $a_0 = 1000$, $a_n = 1,05a_{n-1} - 100$ $(n \geq 1)$.

2. Encontre uma relação de recorrência para o número de maneiras de colocar idênticos Toyotas, Cadillacs e Mercedes em um espaço cujo tamanho é n "unidades", sabendo que Mercedes e Cadillacs ocupam 2 unidades cada um, e que Toyotas ocupam uma unidade cada um.

   Solução:

   $a_0 = 0$, $a_1 = 1$, $a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2}$ $(n \geq 2)$.

3. Considere n quadrados dispostos lado a lado, como mostra a figura:

   Seja a_n = *número de maneiras de colorir os quadrados, de forma que não fiquem dois quadrados vermelhos adjacentes*. Encontre uma relação de recorrência para a_n, para cada um dos seguintes casos:

   (a) Cada quadrado pode ser colorido de vermelho ou de verde.

   (b) Cada quadrado pode ser colorido de vermelho, de verde, ou de amarelo.

   (c) Generalize para k cores (incluindo vermelho).

   Solução:

(a) Cada quadrado pode ser colorido de vermelho ou de verde.
$a_0 = 1$, $a_1 = 2$, $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ $(n \geq 2)$.

(b) Cada quadrado pode ser colorido de vermelho, de verde, ou de amarelo.
$a_0 = 1$, $a_1 = 3$, $a_n = 2a_{n-1} + 2a_{n-2}$ $(n \geq 2)$.

(c) Generalize para k cores (incluindo vermelho).
$a_0 = 1$, $a_1 = k$, $a_n = (k-1)a_{n-1} + (k-1)a_{n-2}$ $(n \geq 2)$.

4. Encontre uma relação de recorrência para o número de maneiras de subir n degraus, se em cada estágio pudermos avançar 1, 3 ou 5 degraus de uma vez.

   Solução:

   $a_0 = 1$, $a_1 = 1$, $a_2 = 1$, $a_3 = 2$, $a_4 = 3$, $a_n = a_{n-1} + a_{n-3} + a_{n-5}$ $(n \geq 5)$.

5. Encontre uma relação de recorrência para o número de pares de coelhos ao fim de n meses, se começamos com 1 par de coelhos e, no final de cada mês, cada par de coelhos com mais de 1 mês de vida tem um par de filhos (1 macho e 1 fêmea).

   Solução:

   $a_0 = 1$, $a_1 = 1$, $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ $(n \geq 2)$.

6. Encontre uma relação de recorrência para o número de sequências quaternárias de n dígitos

   (a) sem 1's consecutivos.

   (b) com número par de 0's.

   (c) com número (total) par de 0's e 1's.

   Solução:

   (a) sem 1's consecutivos.
   $a_0 = 1$, $a_1 = 4$, $a_n = 3a_{n-1} + 3a_{n-2}$ $(n \geq 2)$

   (b) com número par de 0's.
   $a_0 = 1$, $a_n = 3a_{n-1} + (4^{n-1} - a_{n-1})$ $(n \geq 1)$, ou ainda:
   $a_0 = 1$, $a_n = 2a_{n-1} + 4^{n-1}$ $(n \geq 1)$

(c) com número (total) par de 0's e 1's.
$a_0 = 1$, $a_n = 2a_{n-1} + 2(4^{n-1} - a_{n-1})$ $(n \geq 1)$, ou ainda:
$a_0 = 1$, $a_n = 2.4^{n-1} = 4^n/2$ $(n \geq 1)(!)$, ou ainda:
$a_0 = 1$, $a_1 = 2$, $a_n = 4a_{n-1}$ $(n \geq 2)$

7. Seja o conjunto de dígitos e letras $X = \{1, 2, 3, 4, a, b, c, d, e, f, g\}$. Encontre uma relação de recorrência para o número de sequências de n símbolos de X, para cada uma das seguintes situações:

   (a) não há letras consecutivas (idênticas ou não).

   (b) não há dígito seguido de letra.

   (c) o número de letras é par.

   Solução:

   (a) não há letras consecutivas (idênticas ou não).
   $a_0 = 1$, $a_1 = 11$, $a_n = 4a_{n-1} + 28a_{n-2}$ $(n \geq 2)$

   (b) não há dígito seguido de letra.
   $a_0 = 1$, $a_1 = 11$, $a_n = 4a_{n-1} + 49a_{n-2}$ $(n \geq 2)$

   (c) o número de letras é par.
   $a_0 = 1$, $a_n = 4a_{n-1} + 7(11^{n-1} - a_{n-1})$ $(n \geq 1)$, ou seja,
   $a_0 = 1$, $a_n = 7.11^{n-1} - 3a_{n-1}$ $(n \geq 1)$

8. (a) Suponha que uma moeda seja lançada até que apareçam 2 caras, quando então o experimento termina. Encontre uma relação de recorrência para o número de experimentos que terminam no n-ésimo lançamento ou antes.

   (b) O mesmo, supondo que o experimento termina apenas quando aparece a terceira cara.

   (c) Generalize para k caras.

   Solução:

   (a) terminando quando aparece a segunda cara ou antes:
   $a_0 = 0$, $a_n = a_{n-1} + (n-1)3^n$ $(n \geq 1)$

(b) terminando quando aparece a terceira cara ou antes:
$a_0 = 0$, $a_n = a_{n-1} + [(n-1)(n-2)/2]3^n$ $(n \geq 1)$

(c) terminando quando aparece a k-ésima cara ou antes:
$a_0 = 0$, $a_n = a_{n-1} + C(n-1, k-1)3^n$ $(n \geq 1)$

9. Encontre uma relação de recorrência para o número de regiões *infinitas* em que o plano é dividido por n retas, se cada par de retas se intersecciona, mas não mais de duas retas se interseccionam em um ponto.

   Solução:

   $a_0 = 1$, $a_n = a_{n-1} + n$ $(n \geq 1)$.

10. Mostre que $C_1(1+\sqrt{5})^n + C_2(1-\sqrt{5})^n$ é a solução geral para $a_n - 2a_{n-1} - 4a_{n-2} = 0$. interseccionam em um ponto.

    Solução:

    $C_1(1+\sqrt{5})^n + C_2(1-\sqrt{5})^n - 2[C_1(1+\sqrt{5})^{n-1} + C_2(1-\sqrt{5})^{n-1}] - 4[C_1(1+\sqrt{5})^{n-2} + C_2(1-\sqrt{5})^{n-2}] = [C_1(1+\sqrt{5})^n - 2C_1(1+\sqrt{5})^{n-1} - 4C_1(1+\sqrt{5})^{n-2}] + [C_2(1-\sqrt{5})^n - 2C_2(1-\sqrt{5})^{n-1} - 4C_2(1-\sqrt{5})^{n-2}] = C_1(1+\sqrt{5})^{n-2}[(1+\sqrt{5})^2 - 2(1+\sqrt{5}) - 4] + C_2(1-\sqrt{5})^{n-2}[(1-\sqrt{5})^2 - 2(1-\sqrt{5}) - 4] = C_1(1+\sqrt{5})^{n-2}[1 + 2\sqrt{5} + 5 - 2 - 2\sqrt{5} - 4] + C_2(1-\sqrt{5})^{n-2}[1 - 2\sqrt{5} + 5 - 2 + 2\sqrt{5} - 4] = 0$