Bacharelado em Ciência da Computação	DCC/ICEx/UFMG
Matemática Discreta	2º semestre de 1997
Professor: Newton José Vieira	
Lista de Exercícios do Cap. 3/Solução	

3.1/4

Hipótese: $A \backslash B \subseteq C \cap D$ e $x \in A$.
A provar: se $x \notin D$ então $x \in B$.

Será provada a contrapositiva. Assim, suponha que $x \notin B$, e mostremos que, neste caso, $x \in D$. Como $x \in A$ e $x \notin B$, segue-se que $x \in A \backslash B$. Como $A \backslash B \subseteq C \cap D$, deduz-se então que $x \in C \cap D$ e, portanto, $x \in D$.

3.1/5

Hipótese: $a, b \in \mathbf{R}$.
A provar: se $a < b$ então $(a+b)/2 < b$.

Suponha que $a < b$. Somando-se b a ambos os termos, tem-se que $a + b < 2b$; e dividindo-se ambos os termos desta última por 2, tem-se que $(a+b)/2 < b$. Logo, se $a < b$ então $(a+b)/2 < b$.

3.1/7

Hipótese: $a, b, c, d \in \mathbf{R}$, $0 < a < b$ e $d > 0$.
A provar: se $ac \geq bd$ então $c > d$.

Suponha que $ac \geq bd$; como $b > 0$, deduz-se que (*) $ac/b \geq d$. Mas, como $0 < a < b$, tem-se que $0 < a/b < 1$ e, com isto e o fato de que $c > 0$ (como pode ser facilmente verificado), $ac/b < c$. Desta última e (*), segue-se que $c > ac/b \geq d$ e, portanto, $c > d$.

3.1/8

Hipótese: $x, y \in \mathbf{R}$, $3x + 2y \leq 5$.
A provar: se $x > 1$ então $y < 1$.

Suponha que $x > 1$. Subtraindo-se $3x$ de ambos os lados da inequação, obtem-se $2y \leq 5 - 3x$; dividindo-se por 2 obtem-se $y \leq 2,5 - 1,5x$. Como $x > 1$, conclui-se então que $y < 2,5 - 1,5 = 1$. Portanto, se $x > 1$ então $y < 1$

3.1/10

Hipótese: $x \in \mathbf{R}$, $x \neq 4$.
A provar: se $(2x-5)/(x-4) = 3$ então $x = 7$.

(a) Foi usado um argumento da forma "*de Q e $P \rightarrow Q$, conclui-se P*", que não é um argumento válido (é um sofisma).

(b) Suponha que $(2x-5)/(x-4)=3$. Como $x \neq 4$, tem-se então que $2x-5=3(x-4)$ e, assim, $2x-5=3x-12$, de onde se conclui que $x=7$. Logo, se $(2x-5)/(x-4)=3$ então $x=7$.

3.2/1

(a) Hipótese: $P \to Q$, $Q \to R$.
A provar: $P \to R$.

Suponha P. De P e $P \to Q$, por *modus ponens*, deduz-se Q; de Q e $Q \to R$ deduz-se, novamente por *modus ponens*, R. Assim, $P \to R$.

(b) Hipótese: $P \to Q$, $R \to \neg Q$.
A provar: $P \to \neg R$.

Suponha P. De P e $P \to Q$, por *modus ponens*, deduz-se Q; de Q e $R \to \neg Q$ deduz-se, por *modus tollens*, $\neg R$. Assim, $P \to \neg R$.

(c) Hipótese: $\neg R \to (P \to \neg Q)$.
A provar: $P \to (Q \to R)$.

Primeiramente, suponha P. Com isto, deve-se provar que $(Q \to R)$, o que será feito através da contrapositiva. Assim, suponha $\neg R$; desta e de $\neg R \to (P \to \neg Q)$, deduz-se $(P \to \neg Q)$. Usando esta e a suposição inicial, P, deduz-se $\neg Q$. Com isto, tem-se então que $(Q \to R)$ e, portanto, $P \to (Q \to R)$.

3.2/2

Hipótese: $A \subseteq C$, $B \cap C = \phi$.
A provar: se $x \in A$ então $x \notin B$.

Suponha que $x \in A$. Como $A \subseteq C$, então $x \in C$. Mas $B \cap C = \phi$, o que permite concluir que $x \notin B$, Portanto, se $x \in A$ então $x \notin B$.

3.2/3

Hipótese: $A \cap C \subseteq B$, $a \in C$.
A provar: se $a \notin A \setminus B$.

Prova por contradição. Suponha que $a \in A \setminus B$. Então $a \in A$ e (*) $a \notin B$. Como $a \in A$ e $a \in C$, deduz-se que $a \in A \cap C$, e como $A \cap C \subseteq B$, conclui-se ainda que $a \in B$, o que contradiz (*) acima. Logo a suposição inicial de que $a \in A \setminus B$ não está correta, e conclui-se que $a \notin A \setminus B$.

3.2/5

Hipótese: $x, y \in \mathbf{R}$, $x + y = 10$.
A provar: $x \neq 3$ e $y \neq 8$.

(a) A negação de $x \neq 3$ <u>e</u> $y \neq 8$ é $x = 3$ <u>ou</u> $y = 8$.

(b) Contra-exemplo: $x = 3$ e $y = 7$.

3.2/6

A seguinte tabela da verdade mostra que *modus tollens* é uma regra de inferência válida (sempre que $\neg Q$ e $P \to Q$ são verdadeiras, $\neg P$ também é, como mostra os valores em negrito):

P	Q	$\neg Q$	$P \to Q$	$\neg P$
V	V	F	V	F
V	F	V	F	F
F	V	F	V	V
F	F	**V**	**V**	**V**

3.3/2

A provar: se $A \cap (B \backslash C) = \phi$ então $A \cap B \subseteq C$.

Suponha que $A \cap (B \backslash C) = \phi$. Seja um x arbitrário tal que $x \in A \cap B$; neste caso, $x \in A$ e $x \in B$. Por outro lado, como $A \cap (B \backslash C) = \phi$, $x \notin B \backslash C$, ou seja, $x \notin B$ ou $x \in C$; como já ficou determinado que $x \in B$, tem-se que $x \in C$. Portanto, como x é arbitrário, $A \cap B \subseteq C$. E, logo, se $A \cap (B \backslash C) = \phi$ então $A \cap B \subseteq C$.

3.3/6

Hipótese: $x \in \mathbf{R}$
A provar: se $x > 2$ então existe um número real y tal que $y + (1/y) = x$.

Seja um número real x tal que $x > 2$. Seja $y_0 = (x + \sqrt{x^2 - 4})/2$; como $x > 2$, y_0 é um número real, e

$$y_0 + \frac{1}{y_0} = \frac{x + \sqrt{x^2 - 4}}{2} + \frac{1}{\frac{x + \sqrt{x^2 - 4}}{2}} = x;$$

e, portanto, existe y tal que $y + (1/y) = x$. Logo, se $x > 2$ então existe um número real y tal que $y + (1/y) = x$.

3.3/10

Hipótese: $\mathcal{F}$ e $\mathcal{G}$ são famílias não vazias de conjuntos.
A provar: se $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}$ então $\cap\mathcal{G} \subseteq \cap\mathcal{F}$.

Suponha que $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}$, ou seja, (*) $\forall A \in \mathcal{F}(A \in \mathcal{G})$. Suponha que $x \in \cap\mathcal{G}$, ou seja, (**) $\forall A \in \mathcal{G}(x \in A)$. Basta mostrar que $x \in \cap\mathcal{F}$, ou seja, $\forall C \in \mathcal{F}(x \in C)$. Para este fim, seja um conjunto C arbitrário tal que $C \in \mathcal{F}$, e mostremos que $x \in C$. Ora, de $C \in \mathcal{F}$ e de (*), deduz-se que $C \in \mathcal{G}$; desta e de (**) deduz-se, justamente que $x \in C$. Portanto, se $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}$ então $\cap\mathcal{G} \subseteq \cap\mathcal{F}$.

3.3/13

Hipótese: $\mathcal{F}$ e $\mathcal{G}$ são famílias não vazias de conjuntos; $\forall A \in \mathcal{F}(A \subseteq \cap\mathcal{G})$.
A provar: $\cup\mathcal{F} \subseteq \cap\mathcal{G}$.

Tem-se, por hipótese, que (*) $\forall A \in \mathcal{F}[\forall x(x \in A \to \forall B \in \mathcal{G}(x \in B))]$. Deve-se mostrar que $\forall y[y \in \cup\mathcal{F} \to y \in \cap\mathcal{G}]$.

Seja um y arbitrário tal que $y \in \cup\mathcal{F}$, ou seja, tal que (**) $\exists C \in \mathcal{F}(y \in C)$, e mostremos então que $y \in \cap\mathcal{G}$, ou seja, que $\forall D \in \mathcal{G}(y \in D)$. Para mostrar esta última, seja (***) $D \in \mathcal{G}$ e mostremos, finalmente, que $y \in D$.

Seja C_0 que satisfaz (**), ou seja, $C_0 \in \mathcal{F}$ e $y \in C_0$. De (*) e de $C_0 \in \mathcal{F}$, segue-se que $\forall x(x \in C_0 \to \forall B \in \mathcal{G}(x \in B))$; desta e de $y \in C_0$, segue-se que $\forall B \in \mathcal{G}(y \in B)$; e desta e de (***), conclui-se que $y \in D$, como requerido. Logo, $\cup\mathcal{F} \subseteq \cap\mathcal{G}$.

3.3/15

O que deveria ser provado: $\forall x \in \mathbf{R}(x \geq 0)$. A negação desta seria $\exists x \in \mathbf{R}(x^2 < 0)$, e não *para todo* x $x^2 < 0$, como está dito.

3.3/19

A provar: $\forall x \in \mathbf{R}\exists y \in \mathbf{R}\forall z \in \mathbf{R}[yz = (x+z)^2 - (x^2+z^2)]$.

Seja um real x arbitrário, e seja $y_0 = 2x$. Basta mostrar, então, que $\forall z \in \mathbf{R}[y_0 z = (x+z)^2 - (x^2+z^2)]$. Mas, é claro que $y_0 z = 2xz = (x+z)^2 - (x^2+z^2)$ para qualquer real z.

3.4/4

A provar: se $A \subseteq B$ e $A \nsubseteq C$ então $B \nsubseteq C$.

Suponha que $A \subseteq B$ e $A \nsubseteq C$, e que $B \subseteq C$. De $A \subseteq B$ e $B \subseteq C$, deduz-se que $A \subseteq C$, o que contradiz a segunda suposição. Logo, se $A \subseteq B$ e $A \nsubseteq C$ então $B \nsubseteq C$.

3.4/8

A provar: se $A \subseteq B$ então $\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$.

Suponha que $A \subseteq B$. Seja $X \in \mathcal{P}(A)$ e mostremos, então, que $X \in \mathcal{P}(B)$. Ora, dado que $X \in \mathcal{P}(A)$, $X \subseteq A$, e como $A \subseteq B$, $X \subseteq B$, ou seja, $X \in \mathcal{P}(B)$, como requerido.

3.4/11

A provar: $\forall x \in \mathbf{R}[\exists y \in \mathbf{R}(x+y=xy) \leftrightarrow x \neq 1]$.

Seja um x arbitrário; deve-se provar $\exists y \in \mathbf{R}(x+y=xy) \leftrightarrow x \neq 1$.
($\to$)
Suponha que $\exists y \in \mathbf{R}(x+y=xy)$; seja, então um certo $y_0 \in \mathbf{R}$ tal que $x + y_0 = xy_0$. Com isto, $y_0 = x/(x-1)$ e, portanto, $x \neq 1$.
($\leftarrow$)
Suponha que $x \neq 1$, e seja $y_0 = x/(x-1)$. Com isto, tem-se que $x + y_0 = x + x/(x-1) = [x(x-1)+x]/(x-1) = x^2/(x-1) = xy_0$. E, portanto, $\exists y \in \mathbf{R}(x+y=xy)$.

3.4/14

A provar: $A = \cup\mathcal{P}(A)$.

Seja um x arbitrário. $x \in \cup\mathcal{P}(A)$ sse $\exists X \in \mathcal{P}(A)[x \in X]$ sse $\exists X[X \in \mathcal{P}(A) \wedge x \in X]$ sse $\exists X[X \subseteq A \wedge x \in X]$. Assim, basta provar: $\exists X[X \subseteq A \wedge x \in X] \leftrightarrow x \in A$.
$(\rightarrow)$
Suponha que $\exists X[X \subseteq A \wedge x \in X]$; seja X_0 tal que $X_0 \subseteq A \wedge x \in X_0$. É evidente que se $x \in X_0$ e $X_0 \subseteq A$, então $x \in A$.
$(\leftarrow)$
Suponha que $x \in A$. Neste caso, $\{x\} \subseteq A$. Logo, $\exists X[X \subseteq A \wedge x \in X]$.

3.4/16

Hipótese: $\mathcal{F}$ e $\mathcal{G}$ são famílias de conjuntos.

(a) Provar: $(\cup\mathcal{F})\backslash(\cup\mathcal{G}) \subseteq \cup(\mathcal{F}\backslash\mathcal{G})$.
Seja $x \in (\cup\mathcal{F})\backslash(\cup\mathcal{G})$, ou seja, $x \in \cup\mathcal{F}$ e $x \notin \cup\mathcal{G}$, ou ainda, $\exists X \in \mathcal{F}(x \in X)$ e $\forall X \in \mathcal{G}(x \notin X)$. Seja então X_0 tal que $X_0 \in \mathcal{F}$ e $x \in X_0$. Dado que $x \in X_0$ e $\forall X \in \mathcal{G}(x \notin X)$, deduz-se que $X_0 \notin \mathcal{G}$; esta última e o fato de que $x \in X_0$ e $X_0 \in \mathcal{F}$ permite concluir que $\exists X \in \mathcal{F}(X \notin \mathcal{G} \wedge x \in X)$, ou seja, $x \in \cup(\mathcal{F}\backslash\mathcal{G})$.

(b) É incorreto dizer que "*se* $x \in A$ *e* $A \notin \mathcal{G}$, $x \notin \cup\mathcal{G}$".

(c) Contra-exemplo: $\mathcal{F} = \{\{0,1\}\}$ e $\mathcal{G} = \{\{0\}\}$.

3.5/2

A provar: se $A\Delta B \subseteq A$ então $B \subseteq A$.

Suponha que $A\Delta B \subseteq A$, ou seja, $\forall y[(y \in A\backslash B \vee y \in B\backslash A) \rightarrow y \in A]$. Seja um x arbitrário tal que $x \in B$. Deve-se mostrar que $x \in A$. Considere os seguintes casos:
Caso 1. $x \in A$. Nada resta a provar.
Caso2. $x \notin A$. Como $x \in B$, segue-se que $x \in B\backslash A$. Considerando que $\forall y[(y \in A\backslash B \vee y \in B\backslash A) \rightarrow y \in A]$, conclui-se que $x \in A$.
Em qualquer dos casos, chegou-se a $x \in A$. Logo, se $A\Delta B \subseteq A$ então $B \subseteq A$.

3.5/5

A provar: $|2x - 6| > x$ sse $|x - 4| > 2$, para todo $x \in \mathbf{R}$.

$(\rightarrow)$
Suponha que $|2x - 6| > x$.
Caso 1. $2x - 6 \geq 0$. Como $|2x - 6| > x$, deduz-se que $x > 6$; e, portanto, $x - 4 > 2$.
Caso 2. $2x - 6 < 0$. Como $|2x - 6| > x$, deduz-se que $6 - 2x > x$; logo, $x < 2$; e, portanto, $4 - x > 2$.

$(\leftarrow)$
Suponha que $|x - 4| > 2$.
Caso 1. $x - 4 \geq 0$. Como $|x - 4| > 2$, deduz-se que $x > 6$; e, portanto, $x - 6 > 0$ e

$2x - 6 > x$.

Caso 2. $x - 4 < 0$. Como $|x - 4| > 2$, deduz-se que $4 - x > 2$; logo, $x < 2$; e, portanto, $6 - 2x > x$.

3.5/7

Hipótese: $\mathcal{F}$ e $\mathcal{G}$ são famílias de conjuntos não nulas.

(a) Provar: $\cup(\mathcal{F} \cup \mathcal{G}) = (\cup\mathcal{F}) \cup (\cup\mathcal{G})$.
Será mostrado que $x \in \cup(\mathcal{F} \cup \mathcal{G})$ se, e somente se $x \in (\cup\mathcal{F}) \cup (\cup\mathcal{G})$:

$$\begin{aligned} x \in \cup(\mathcal{F} \cup \mathcal{G}) &\text{ sse } \exists A[A \in \mathcal{F} \cup \mathcal{G} \wedge x \in A] \\ &\text{ sse } \exists A[(A \in \mathcal{F} \vee A \in \mathcal{G}) \wedge x \in A] \\ &\text{ sse } \exists A[(A \in \mathcal{F} \wedge x \in A) \vee (A \in \mathcal{G} \wedge x \in A)] \\ &\text{ sse } \exists A(A \in \mathcal{F} \wedge x \in A) \vee \exists A(A \in \mathcal{G} \wedge x \in A) \\ &\text{ sse } x \in \cup\mathcal{F} \vee x \in \cup\mathcal{G} \\ &\text{ sse } x \in (\cup\mathcal{F}) \cup (\cup\mathcal{G}). \end{aligned}$$

(b) Um teorema similar sobre $\cap(\mathcal{F} \cup \mathcal{G})$: $\cap(\mathcal{F} \cup \mathcal{G}) = (\cap\mathcal{F}) \cap (\cap\mathcal{G})$.
Será mostrado que $x \in \cap(\mathcal{F} \cup \mathcal{G})$ se, e somente se $x \in (\cap\mathcal{F}) \cap (\cap\mathcal{G})$:

$$\begin{aligned} x \in \cap(\mathcal{F} \cup \mathcal{G}) &\text{ sse } \forall A[A \in \mathcal{F} \cup \mathcal{G} \rightarrow x \in A] \\ &\text{ sse } \forall A[(A \in \mathcal{F} \vee A \in \mathcal{G}) \rightarrow x \in A] \\ &\text{ sse } \forall A[(A \in \mathcal{F} \rightarrow x \in A) \wedge (A \in \mathcal{G} \rightarrow x \in A)] \\ &\text{ sse } \forall A(A \in \mathcal{F} \rightarrow x \in A) \wedge \forall A(A \in \mathcal{G} \rightarrow x \in A) \\ &\text{ sse } x \in \cap\mathcal{F} \wedge x \in \cap\mathcal{G} \\ &\text{ sse } x \in (\cap\mathcal{F}) \cap (\cap\mathcal{G}). \end{aligned}$$

3.5/9

A prova está incorreta. Para corrigí-la, basta observar que no caso 1 pode-se concluir que $3 \leq x < 6$, e no caso 2, $0 < x < 3$. Conclusão final: $3 \leq x < 6 \vee 0 < x < 3$, ou seja, $0 < x < 6$.

3.5/10

A prova está correta. Usa inicialmente a estratégia do x arbitrário (no caso, conjuntos A, B e C arbitrários), em seguida a prova direta para implicação, e depois: instanciação existencial (assumindo um x tal que $x \in A$ e $x \notin C$), instanciação universal e *modus tollens* (concluindo, assim, que $x \notin A \backslash B$), aplicação da regra "de $\neg P \vee Q$ e P, conclua P" (para concluir $x \in B$) e, finalmente, a regra que permite concluir que $\exists x P(x)$, quando determinado um objeto x tal que $P(x)$ (no caso, tendo determinado que $x \in A \cap B$, conclui-se que $\exists x(x \in A \cap B)$).

3.6/1

A provar: $\forall x \in \mathbf{R} \exists! y \in \mathbf{R}(x^2 y = x - y)$.

Seja $y_0 = x/(x^2+1)$. Com isto, tem-se que

$$x - y_0 = x - \frac{x}{x^2+1} = \frac{x^3+x-x}{x^2+1} = \frac{x^3}{x^2+1} = x^2 y_0.$$

Logo, $\exists y \in \mathbf{R}(x^2 y = x - y)$, para qualquer real x. É evidente que tal y é único, pois qualquer z tal que $(x^2 z = x - z)$, deve ser tal que $z = x/(x^2+1) = y_0$.

3.6/3

Seja $\cup!\mathcal{F} = \{x \mid \exists!A(A \in \mathcal{F} \wedge x \in A)\}$.

(a) A provar: $\cup!\mathcal{F} \subseteq \cup\mathcal{F}$.
A condição de existência para $x \in \cup!\mathcal{F}$ é $\exists A(A \in \mathcal{F} \wedge x \in A)$. Logo, se $x \in \cup!\mathcal{F}$ então $x \in \cup\mathcal{F}$ e, portanto, $\cup!\mathcal{F} \subseteq \cup\mathcal{F}$.

(b) Hipótese: $\forall A \in \mathcal{F} \forall B \in \mathcal{F}(A \neq B \rightarrow A \cap B = \phi)$.
A provar: $\cup!\mathcal{F} = \cup\mathcal{F}$.
Será provado que $x \in \cup!\mathcal{F}$ sse $x \in \cup\mathcal{F}$, para x arbitrário.
$(\rightarrow)$ Já provado no item (a).
$(\leftarrow)$
Suponha que $x \in \cup\mathcal{F}$. Então $\exists A(A \in \mathcal{F} \wedge x \in A)$; basta provar então a condição de unicidade: $\forall B \forall C[((B \in \mathcal{F} \wedge x \in B) \wedge (C \in \mathcal{F} \wedge x \in C)) \rightarrow B = C]$.
Sejam então B e C arbitrários tais que $B \in \mathcal{F} \wedge x \in B$ e $C \in \mathcal{F} \wedge x \in C$. Se $B = C$, nada resta a provar. Seja então $B \neq C$; neste caso, dada a hipótese acima, tem-se que $B \cap C = \phi$, o que contraria o fato de que $x \in B$ e $x \in C$. Logo, $B = C$ em qualquer dos dois casos. Portanto, $((B \in \mathcal{F} \wedge x \in B) \wedge (C \in \mathcal{F} \wedge x \in C)) \rightarrow B = C]$ para quaisquer conjuntos B e C.

3.6/4

(a) A provar: $\exists! X \forall A(A \Delta X = A)$.
Existência. $A\Delta\phi = A$, para todo A.
Unicidade. Sejam B e C tais que $\forall A A\Delta B = A$ e $\forall A A\Delta C = A$. Tem-se então que $(A \cup B)\backslash A \cap B = A$ e $(A \cup C)\backslash A \cap C = A$ para todo A.Com isto, tem-se que $x \in (A \cup B)\backslash A \cap B$ se, e somente se, $x \in A$ se, e somente se, $x \in (A \cup C)\backslash A \cap C$, para para qualquer A. É fácil mostrar que se $x \in B$ então $x \notin A$ e, neste caso, $x \in C$; e vice-versa: se $x \in C$ então $x \notin A$ e, neste caso, $x \in B$. Logo, $B = C$.

(b) A provar: $\forall A \exists! B(A\Delta B = \phi)$.
Seja A arbitrário e $B = A$. Neste caso, obviamente, $A\Delta B = \phi$. Resta mostrar, então, que se $A\Delta C = \phi$, $C = B = A$. Seja então $A\Delta C = \phi$; neste caso, não existe x tal que $x \in (A \cup C)\backslash A \cap C$, ou seja, para qualquer x, $x \notin (A \cup C)$ ou $x \in A \cap C$; ou ainda, $x \notin A \wedge x \notin C$ ou $x \in A \wedge x \in C$, ou seja, $x \in A \leftrightarrow x \in C$, ou ainda, $A = C$.

(c) A provar: $\forall A \forall B \exists! C(A\Delta C = B)$.

Sejam A e B conjuntos arbitrários. Seja $C = A\Delta B$. Neste caso:

$$
\begin{aligned}
x \in A\Delta C \text{ sse } & x \in A\Delta(A\Delta B) \\
\text{sse } & (x \in A \vee x \in A\Delta B) \wedge (x \notin A \vee x \notin A\Delta B) \\
\text{sse } & [x \in A \vee ((x \in A \vee x \in B) \wedge (x \notin A \vee x \notin B))] \\
& \wedge[x \notin A \vee (x \notin A \wedge x \notin B) \vee (x \in A \wedge x \in B)] \\
\text{sse } & [(x \in A \vee x \in A \vee x \in B) \wedge (x \in A \vee x \notin A \vee x \notin B)] \\
& \wedge[((x \notin A \vee x \notin A) \wedge (x \notin A \vee x \notin B)) \vee (x \in A \wedge x \in B)] \\
\text{sse } & [x \in A \vee x \in B] \\
& \wedge[(x \notin A \wedge (x \notin A \vee x \notin B)) \vee (x \in A \wedge x \in B)] \\
\text{sse } & [x \in A \vee x \in B] \\
& \wedge[(x \notin A \vee x \notin A) \wedge (x \notin A \vee x \in B) \wedge (x \notin A \vee x \notin B \vee x \in A \\
& \wedge(x \notin A \vee x \notin B \vee x \in B)] \\
\text{sse } & [x \in A \vee x \in B] \wedge [x \notin A \vee x \in B] \\
\text{sse } & (x \in A \vee x \notin A) \wedge x \in B \\
\text{sse } & x \in B
\end{aligned}
$$

Portanto, $\forall A \forall B \exists C(A\Delta C = B)$. Resta, portanto, provar que para conjuntos arbitrários D e E, se $A\Delta D = B$ e $A\Delta E = B$ então $D = E$. Assim, sejam $A\Delta D = B = A\Delta E$. Basta, então provar que $D = E$. Para isto, será provado, inicialmente, que $D \subseteq E$. Seja $x \in D$. Como $A\Delta D \subseteq A\Delta E$, tem-se que $\forall y[((y \in A \wedge y \notin D) \vee (y \notin A \wedge y \in D)) \rightarrow ((y \in A \wedge y \notin E) \vee (y \notin A \wedge y \in E))]$. Como $x \in D$, deduz-se que $[(x \notin A \rightarrow (x \in A \wedge x \notin E) \vee (x \notin A \wedge x \in E)]$. Para que esta última seja verdadeira, observe que se $x \notin A$ é verdadeira, para que o consequente o seja, é necessário que $x \in E$ seja verdadeira. Logo, $x \in E$ e, portanto, $D \subseteq E$. O fato de que $E \subseteq D$ segue de $A\Delta E \subseteq A\Delta D$, de forma análoga.

(d) A provar: $\forall A \forall B \forall C(A\Delta C = B\Delta C \rightarrow A = B)$.

Como a operação Δ é comutativa, basta provar $\forall A \forall B \forall C(C\Delta A = C\Delta B \rightarrow A = B)$, o que pode ser feito como mostrado no final do item anterior.

(e) A provar: $\forall A \exists! B[B \subseteq A \wedge \forall C(C \subseteq A \rightarrow B\Delta C = A\backslash C)]$.

Seja um conjunto A arbitrário.

Existência. Seja $B = A$ e seja um conjunto arbitrário C tal que $C \subseteq A$. Basta provar, então, que $B\Delta C = A\backslash C$, o que pode ser feito assim:

$$
\begin{aligned}
x \in B\Delta C \text{ sse } & x \in A\Delta C \text{ (pois } B = A) \\
\text{sse } & (x \in A \wedge x \notin C) \vee (x \notin A \wedge x \in C) \\
\text{sse } & x \in A \wedge x \notin C \text{ (pois } C \subseteq A) \\
\text{sse } & x \in A\backslash C
\end{aligned}
$$

Unicidade. Seja um conjunto D arbitrário, e mostremos que se $[D \subseteq A \wedge \forall C(C \subseteq A \rightarrow D\Delta C = A\backslash C)]$ então $D = B = A$. Para isto, basta supor que $D \subseteq A$ e que $\forall C(C \subseteq A \rightarrow D\Delta C = A\backslash C)]$ e mostrar que, neste caso, $D = A$. Dadas as duas últimas suposições, deduz-se (substituindo-se C por D na última) que $D \Delta D = A \backslash D$ e, portanto, $A \backslash D = \phi$. Desta última, conclui-se que $A \subseteq D$. Esta e a suposição anterior de que $D \subseteq A$, permitem concluir que $D = A$.

3.6/6

(a) $\exists x \exists y [P(x) \wedge P(y) \wedge x \neq y \wedge \forall z (P(z) \rightarrow (z = x \vee z = y))]$.

(b) A estratégia envolve dois passos:
(1) encontrar x_0 e y_0 tais que $P(x_0) \wedge P(y_0) \wedge x_0 \neq y_0$);
(2) provar $\forall z [P(z) \rightarrow (z = x_0 \vee z = y_0)]$

(c) A provar: existem exatamente 2 soluções para $x^3 = x^2$.
(1) Sejam $x_0 = 0$ e $x_1 = 1$. Tem-se: $0^3 = 0^2$ e $1^3 = 1^2$.
(2) Suponha que $x^3 = x^2$, para um x arbitrário. Deve-se então provar que $x = 0 \vee x = 1$. Para isto, suponha que $x \neq 0$. Com isto, deduz-se que $x^3/x^2 = x^2/x^2$, ou seja, $x = 1$. Portanto, se $x^3 = x^2$ então $x = 0 \vee x = 1$. Como o x é arbitrário, conclui-se que $\forall x [x^3 = x^2 \rightarrow (x = 0 \vee x = 1)]$.