Bacharelado em Ciência da Computação	DCC/ICEx/UFMG
Matemática Discreta	$2^{\underline{o}}$ semestre de 1997
Professor: Newton José Vieira	
Lista de Exercícios de Funções Geradoras/Solução	

1. Seja $f(x)$ a função geradora para a_r. Mostre que:

   (a) $(1 + x + x^2 + \cdots)f(x)$ é a função geradora para $a_0 + a_1 + \cdots + a_r$.

   (b) $xf'(x)$ é a função geradora para ra_r, onde $f'(x)$ é a derivada de $f(x)$.

   Solução:

   (a) $(1 + x + x^2 + \cdots)(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_rx^r + \cdots)$
   $= a_0 + (a_0 + a_1)x + (a_0 + a_1 + a_2)x^2 + \cdots + (a_0 + a_1 + \cdots + a_r)x^r + \cdots$

   (b) $x(a_0 + a_1x + 2a_2x^2 + \cdots + a_rx^r + \cdots)' = x(a_1 + 2a_2x + \cdots + ra_rx^{r-1} + \cdots)$
   $= a_1x + 2a_2x^2 + \cdots + ra_rx^r + \cdots$

2. Apresente funções geradoras para os seguintes problemas de equações inteiras:

   (a) $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = r$, com x_1, x_2, x_3 ímpares e x_2, x_4 pares.

   (b) $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = r$, com $x_1 + x_2 = 6$ e $x_k \geq 0$.

   (c) $2x_1 + 3x_2 + 5x_3 = r$, com $x_k > k$.

   Solução:

   (a) $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = r$, com x_1, x_2, x_3 ímpares e x_2, x_4 pares.
   $(x + x^3 + x^5 + \cdots)^3(1 + x^2 + x^4 + \cdots)^2 = x^3(1 + x^2 + x^4 + \cdots)^5$.

   (b) $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = r$, com $x_1 + x_2 = 6$ e $x_k \geq 0$.
   O número de soluções para $x_1 + x_2 = 6$, com $x_k \geq 0$, é $C(2 - 1 + 6, 6)$. Logo, o número de soluções é $C(7, 6)$ multiplicado pelo número de soluções para $x_3 + x_4 + x_5 = r$, com $x_3, x_4, x_5 \geq 2$ ("distribuindo-se" 6 igualmente entre as variáveis). Assim, a função geradora é $C(7, 6) \times (x^2 + x^3 + x^4 + \cdots)^3 = 7x^6(1 + x + x^2 + \cdots)^3$.

   (c) $2x_1 + 3x_2 + 5x_3 = r$, com $x_k > k$.
   O número de soluções é o mesmo que para $y_1 + y_2 + y_3 = r$, com $y_1 = 4, 6, 8, \ldots$, $y_2 = 9, 12, 15, \ldots$, $y_3 = 20, 25, 30, \ldots$. Assim, a função geradora é $(x^4 + x^6 + x^8 + \cdots)(x^9 + x^{12} + x^{15} + \cdots)(x^{20} + x^{25} + x^{30} + \cdots)$.

3. Encontre a função geradora para o número de maneiras em que o lançamento de 3 dados distintos pode produzir um soma de, no máximo, r.

   Solução:

O problema equivale a encontrar a função geradora para o número de soluções inteiras para $x_1 + x_2 + x_3 \leq r$, com $1 \leq x_k \leq 6$, que é o número de soluções inteiras para $x_1 + x_2 + x_3 + y = r$, com $1 \leq x_k \leq 6$ e $y \geq 0$. Assim, a função geradora é $(x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6)^3(1 + x + x^2 + \cdots)$.

4. Encontre os coeficientes dos seguintes termos:

   (a) x^5 em $(1 + x + x^2 + \cdots)(1 + x + x^2 + \cdots)$.

   (b) x^{24} em $(x^3 + x^4 + \cdots + x^{12})^4$.

   (c) x^6 em $(x + x^2 + \cdots)^2(1 - x^3)^3$.

   (d) x^5 em $(1 - x^2)^{12}/(1 - x)^3$.

   (e) x^r em $(1 + x + x^2 + \cdots)^r/(1 - x)^r$.

   Solução:

   (a) x^5 em $(1 + x + x^2 + \cdots)(1 + x + x^2 + \cdots)$
   Coeficiente de x^5: $C(2 - 1 + 5, 5) = 6$.

   (b) x^{24} em $(x^3 + x^4 + \cdots + x^{12})^4$.

$$\begin{aligned}
&(x^3 + x^4 + \cdots + x^{12})^4 \\
&\quad = x^{12}(1 + x^2 + x^3 \cdots + x^9)^4 = x^{12}(1 - x^{10})^4(1 + x + x^2 \cdots)^4 \\
&\quad = x^{12}(C(4,0) - C(4,1)x^{10} + C(4,2)x^{20} - C(4,3)x^{30} + C(4,4)x^{40}) \\
&\qquad\quad (C(4 - 1 + 0) + C(4 - 1 + 1, 1)x + C(4 - 1 + 2, 2)x^2 + \cdots)
\end{aligned}$$

   Coeficiente de x^{24}: $C(4,0)C(4 - 1 + 12, 12) - C(4,1)C(4 - 1 + 2, 2) = 415$.

   (c) x^6 em $(x + x^2 + \cdots)^2(1 - x^3)^3$.

$$\begin{aligned}
&(x + x^2 + \cdots)^2(1 - x^3)^3 = x^2(1 + x + x^2 \cdots)^2(1 - x^3)^3 \\
&\quad = x^2(C(2 - 1 + 0) + C(2 - 1 + 1, 1)x + C(2 - 1 + 2, 2)x^2 + \cdots) \\
&\qquad (C(3,0) - C(3,1)x^3 + C(3,2)x^6 - C(3,3)x^9)
\end{aligned}$$

   Coeficiente de x^6: $C(2 - 1 + 4, 4)C(3,0) - C(2 - 1 + 1, 1)C(3,1) = -1$.

   (d) x^5 em $(1 - x^2)^{12}/(1 - x)^3$.

$$\begin{aligned}
&(1 - x^2)^{12}/(1 - x)^3 = (1 - x^2)^{12}(1 + x + x^2 \cdots)^3 \\
&\quad = (C(12,0) - C(12,1)x^2 + C(12,2)x^4 - \cdots + C(12,12)x^{24}) \\
&\qquad (C(3 - 1 + 0) + C(3 - 1 + 1, 1)x + C(3 - 1 + 2, 2)x^2 + \cdots)
\end{aligned}$$

   Coeficiente de x^5: $C(12,0)C(3-1+5,5) - C(12,1)C(3-1+3,3) + C(12,2)C(3-1+1,1) = 99$.

(e) x^r em $(1+x+x^2+\cdots)^r/(1-x)^r$.
$(1+x+x^2+\cdots)^r/(1-x)^r = (1+x+x^2+\cdots)^{2r}$.
Coeficiente de x^r: $C(2r-1+r,r) = C(3r-1,r)$.

5. Encontre funções geradoras (FG's) para os seguintes a_n:

   (a) $a_n = 12$.

   (b) $a_n = 3n-4$.

   (c) $a_n = n(n-1)$.

   (d) $a_n = n^4$.

   (e) $a_n = n^2 3^n$.

   Solução:

   (a) $a_n = 12$.
   FG para 12: $12/(1-x)$.

   (b) $a_n = 3n-4$.
   FG para 1: $1/(1-x)$.
   FG para n: $x(1/(1-x))' = x/(1-x)^2$.
   FG para $3n$: $3x/(1-x)^2$.
   FG para $3n-4$: $3x/(1-x)^2 - 4/(1-x) = (7x-4)/(1-x)^2$.

   (c) $a_n = n(n-1)$.
   FG para $n-1$: $x/(1-x)^2 - 1/(1-x) = (2x-1)/(1-x)^2$.
   FG para $n(n-1)$: $x[(2x-1)/(1-x)^2]' = 2x^2/(1-x)^3$.

   (d) $a_n = n^4$.
   FG para n^2: $x[x/(1-x)^2]' = (x+x^2)/(1-x)^3$.
   FG para n^3: $x[(x+x^2)/(1-x)^3]' = (x^3+4x^2+x)/(1-x)^4$.
   FG para n^4: $x[(x^3+4x^2+x)/(1-x)^4]' = (x^4+11x^3+11x^2+x)/(1-x)^5$.

   (e) $a_n = n^2 3^n$.
   FG para 3^n: $1/(1-3x)$.
   FG para $n3^n$: $x[1/(1-3x)]' = 3x/(1-3x)^2$.
   FG para $n^2 3^n$: $x[3x/(1-3x)^2]' = 3x(1+3x)/(1-3x)^3$.

6. Use as funções geradoras do exercício anterior para avaliar as seguintes somas:

   (a) $12 + 12 + \cdots + 12$ (n+1 vezes).

   (b) $-4 + -1 + 2 + \cdots + (3n-4)$.

   (c) $2 \times 1 + 3 \times 2 + \cdots + n(n-1)$.

(d) $1^4 + 2^4 + \cdots + n^4$.

(e) $3 + 2^2 3^2 \cdots + n^2 3^n$.

Solução:

(a) $12 + 12 + \cdots + 12$ (n+1 vezes).
FG para 12: $12/(1-x)$.
FG para $\sum_{k=0}^{n} 12$: $12/(1-x)^2 = 12(1+x+x^2+\cdots)^2 = 12[C(2-1+0,0)+C(2-1+1,1)x + C(2-1+2,2)x^2 + \cdots]$. O coeficiente de x^n é $12C(2-1+n,n) = 12C(n+1,n) = 12(n+1)$.

(b) $-4 + -1 + 2 + \cdots + (3n-4)$.
FG para $3n-4$: $(7x-4)/(1-x)^2$.
FG para $\sum_{k=0}^{n}(3k-4)$: $(7x-4)/(1-x)^3 = (7x-4)[C(3-1+0) + C(3-1+1,1)x + C(3-1+2,2)x^2 + \cdots]$. O coeficiente de x^n é $7C(3-1+n-1,n-1) - 4C(3-1+n,n) = (n+1)(3n-8)/2$.

(c) $2 \times 1 + 3 \times 2 + \cdots + n(n-1)$.
FG para $n(n-1)$: $2x^2/(1-x)^3$.
FG para $\sum_{k=0}^{n}[k(k-1)]$: $2x^2/(1-x)^4 = 2x^2[C(4-1+0,0) + C(4-1+1,1)x + C(4-1+2,2)x^2 + \cdots]$. O coeficiente de x^n é $2C(4-1+n-2,n-2) = 2C(n+1,n-2) = n(n^2-1)/3$.

(d) $1^4 + 2^4 + \cdots + n^4$.
FG para n^4: $(x^4+11x^3+11x^2+x)/(1-x)^5$.
FG para $\sum_{k=0}^{n} k^4$: $(x^4+11x^3+11x^2+x)/(1-x)^6 = (x^4+11x^3+11x^2+x)[C(6-1+0,0) + C(6-1+1,1)x + C(6-1+2,2)x^2 + \cdots]$. O coeficiente de x^n é $C(6-1+n-4,n-4)+11C(6-1+n-3,n-3)+11C(6-1+n-2,n-2)+C(6-1+n-1,n-1) = C(n+1,n-4)+11C(n+2,n-3)+11C(n+3,n-2)+C(n+4,n-1) = n(n+1)(6n^3+9n^2+n-1)/30$.

(e) $3 + 2^2 3^2 \cdots + n^2 3^n$.
FG para $n^2 3^n$: $3x(1+3x)/(1-3x)^3$.
FG para $\sum_{k=0}^{n}[k^2 3^k]$: $3x(1+3x)/(1-3x)^3(1-x)$. Decompondo em frações parciais, obtém-se $[3/(1-3x)^3] - [6/(1-3x)^2] + [9/2(1-3x)] - [3/2(1-x)] = 3(1+(3x)+(3x)^2+\cdots)^3 - 6(1+(3x)+(3x)^2+\cdots)^2 + (9/2)(1+(3x)+(3x)^2+\cdots) - (3/2)(1+x+x^2+\cdots)$. O coeficiente de x^n é $3C(3-1+n,n)3^n - 6C(2-1+n,n)3^n + (9/2)3^n - (3/2) = [3^{n+1}(n^2-n+1)-3]/2$.

7. Utilizando funções geradoras, determine o número de soluções inteiras para as seguintes equações:

(a) $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 10$, com $1 \leq x_i \leq 6$.

(b) $x_1 + x_2 + x_3 = 6$, com $1 \leq x_1 \leq 5$, $x_2 \geq 2$ e $x_3 \geq 3$.

(c) $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 10$, com $1 \leq x_i \leq 10$.

Solução:

(a) $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 10$, com $1 \leq x_i \leq 6$.
Função geradora:

$$\begin{aligned}
(x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6)^4 &= x^4(1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5)^4 \\
&= x^4(1 - x^6)^4(1 + x + x^2 + \cdots)^4 \\
&= x^4(C(4,0) - C(4,1)x^6 + C(4,2)x^{12} - C(4,3)x^{18} + C(4,4)x^{24}) \\
&\quad (C(4-1+0) + C(4-1+1,1)x + C(4-1+2,2)x^2 + \cdots)
\end{aligned}$$

Coeficiente de x^{10}: $C(4,0)C(4-1+6,6) - C(4,1)C(4-1+0,0) = C(9,6) - 4 = 80$.

(b) $x_1 + x_2 + x_3 = 6$, com $1 \leq x_1 \leq 5$, $x_2 \geq 2$ e $x_3 \geq 3$.
Função geradora: $(x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5)(x^2 + x^3 + \cdots)(x^3 + x^4 + \cdots) = x^6(1 + x + x^2 + x^3 + x^4)(1 + x + x^2 + \cdots)^2 = x^6(1 + x + x^2 + x^3 + x^4)[C(2-1+0,0) + C(2-1+1,1)x + C(2-1+2,2)x^2 + \cdots)]$.
Coeficiente de x^6: $1 \times 1 \times C(1,0) = 1$.

(c) $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 10$, com $1 \leq x_i \leq 10$.
Função geradora: $(x+x^2+\cdots+x^{10})^4(1+x+x^2+\cdots) = x^4(1+x+x^2+\cdots+x^9)^4(1+x+x^2+\cdots) = x^4(1-x^{10})^4(1+x+x^2+\cdots)^5 = x^4[C(4,0)-C(4,1)x^{10}+C(4,2)x^{20}-C(4,3)x^{30}+C(4,4)x^{40}][C(5-1+0,0)+C(5-1+1,1)x+C(5-1+2,2)x^2+\cdots)]$.
Coeficiente de x^{10}: $C(4,0)C(5-1+6,6) = C(10,6) = 210$.

8. De quantas maneiras se pode distribuir r moedas idênticas a 20 crianças, se cada criança recebe no mínimo 1, mas não mais que 4 moedas?

   Solução:

   A resposta é o número de soluções inteiras para $x_1 + \cdots + x_{20} = r$, com $1 \leq x_k \leq 4$. A função geradora é $(x + x^2 + x^3 + x^4)^{20} = x^{20}(1 + x + x^2 + x^3)^{20} = x^{20}(1 - x^4)^{20}(1 + x + x^2 + \cdots)^{20} = x^{20}[C(20,0) - C(20,1)x^4 + C(20,2)x^8 - \cdots + C(20,20)x^{80}][C(20-1+0,0) + C(20-1+1,1)x + \cdots]$.

   Coeficiente de x^r: $C(20,0)C(r-1, r-20) - C(20,1)C(r-5, r-24) + \cdots$.

9. De quantas maneiras se pode selecionar 7 inteiros não consecutivos de $\{1, 2, 3, \ldots, 50\}$?

   Solução:

   Reformulando o problema: sejam

   - $1 \leq n_1 < n_2 < n_3 < n_4 < n_5 < n_6 < n_7 \leq n$ os números a serem selecinados;

- $x_1 = n_1$, $x_2 = n_2 - n_1$, $x_3 = n_3 - n_2$, $x_4 = n_4 - n_3$, $x_5 = n_5 - n_4$, $x_6 = n_6 - n_5$, $x_7 = n_7 - n_6$, $x_8 = n - n_7$.

Então o problema se reduz a encontrar o número de soluções inteiras para:

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_8 = 50, \text{ com } x_1 \geq 1, x_i \geq 2 \text{ para } 2 \leq i \leq 7 \text{ e } x_8 \geq 0.$$

A função geradora é: $(x + x^2 + x^3 + \cdots)(x^2 + x^3 + x^4 + \cdots)^6(1 + x + x^2 + \cdots) = x^{13}(1 + x + x^2 + \cdots)^8$.

O coeficiente de x^{50} é: $C(8 - 1 + 37, 37)$.

10. Quantas maneiras existem de distribuir 20 cédulas de 1 real a 10 meninas e r meninos, se cada menina recebe no mínimo 1 real e cada menino recebe no máximo 3 reais?

    Solução:

    A resposta é o número de soluções inteiras para $x_1 + \cdots + x_{10} + y_1 + \cdots + y_r = 20$, com $x_i \geq 1$ e $y_k \leq 3$. A função geradora é $(x + x^2 + x^3 + \cdots)^{10}(1 + x + x^2 + x^3)^r = x^{10}(1+x+x^2+\cdots)^{10}(1-x^4)^r(1+x+x^2+\cdots)^r = x^{10}(1-x^4)^r(1+x+x^2+\cdots)^{10+r} = x^{10}[C(r,0) - C(r,1)x^4 + C(r,2)x^8 - \cdots + (-1)^r C(r,r)x^{4r}][C(r+10-1+0,0) + C(r+10-1+1,1)x + \cdots]$.

    Coeficiente de x^{20}: $C(r,0)C(r+10-1+10,10) - C(r,1)C(r+10-1+6,6) + C(r,2)C(r+10-1+2,2) = C(r+19,10) - rC(r+15,6) + (r(r-1)/2)C(r+11,2)$.

11. Use função geradora para encontrar o número de maneiras de pintar 20 quartos idênticos de um hotel com 5 cores, se existe tintas das cores azul, cor-de-rosa e verde suficientes para pintar no máximo 3 quartos (para cada uma destas cores).

    Solução:

    A função geradora é $(1 + x + x^2 + x^3)^3(1 + x + x^2 + \cdots)^2$. O coeficiente de x^{20}: $C(3,0)C(5-1+20,20) - C(3,1)C(5-1+16,16) + C(3,2)C(5-1+12,12) - C(3,3)C(5-1+8,8)$.

12. De quantas maneiras se pode distribuir $2n$ bolas idênticas em 4 caixas distintas, de forma que nenhuma caixa contenha mais que n bolas?

    Solução:

    A resposta é o número de soluções inteiras para $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2n$, com $x_i \leq n$. A função geradora é $(1 + x + \cdots + x^n)^4 = (1 - x^{n+1})^4(1 + x + x^2 + \cdots)^4 = [C(4,0) - C(4,1)x^{n+1} + C(4,2)x^{2(n+1)} - C(4,3)x^{3(n+1)} + C(4,4)x^{4(n+1)}][C(4-1+0,0) + C(4-1+1,1)x + \cdots]$. O coeficiente de x^{2n} é: $C(4,0)C(4-1+2n,2n) - C(4,1)C(4-1+n-1,n-1) = C(2n+3,2n) - 4C(n+2,n-1)$.