INTRODUÇÃO À TEORIA DOS GRAFOS BASEADO EM TOWNSEND (1987), CAP. 6

Newton José Vieira

UFMG

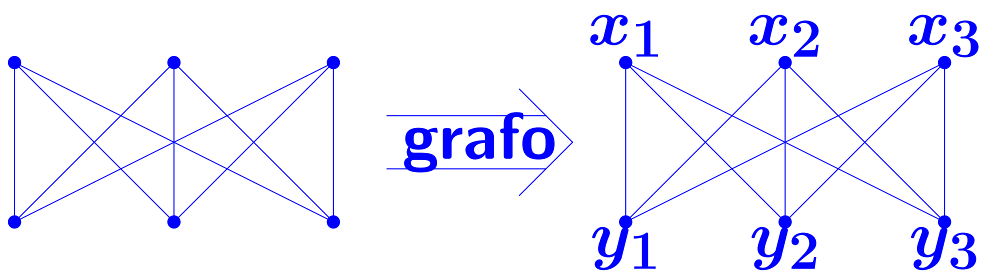
30 de julho de 2007

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO À TEORIA DOS GRAFOS

Um exemplo

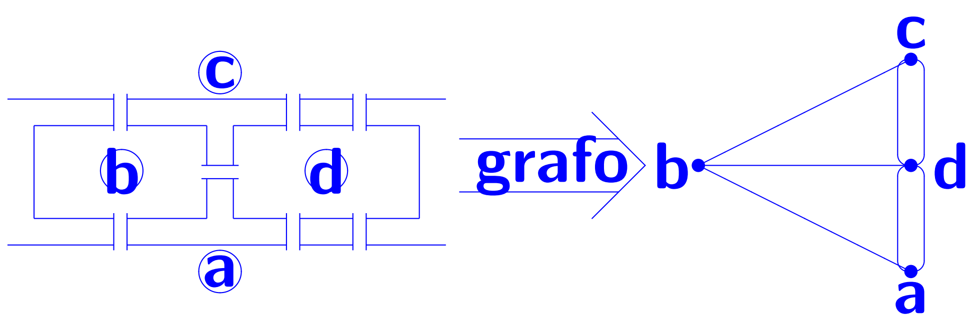
(1) Um engenheiro eletricista necessita construir um chip no qual 3 junções devem ser ligadas a 3 outras. Pergunta: isto pode ser feito sem que as ligações se cruzem?



Mais um exemplo

(2) O problema das Sete Pontes de Königsberg:

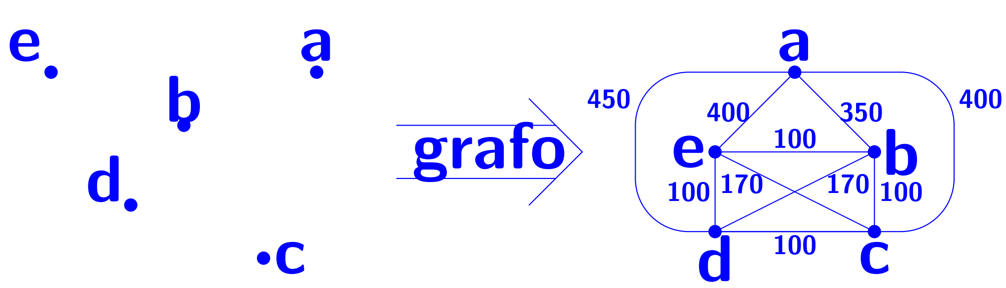
Na cidade de Caliningrado existiam 7 pontes sobre o rio Prególia. Tais pontes ligavam 2 ilhas uma com a outra e com as margens do rio, conforme mostrado na figura abaixo. Pergunta: é possível percorrer a cidade, começando e terminando no mesmo lugar, e cruzando cada ponte exatamente uma vez?



Euler (1736): origem da teoria dos grafos.

Mais um exemplo

(3) O Sindicato dos Pescadores monitora populações de peixes no Golfo do México. Todo dia são escolhidos alguns pontos do golfo e enviadas algumas pessoas de barco para colher amostras de peixes e de correntes. Pergunta: qual é a menor rota que o barco pode tomar, de forma que passe por todos os pontos?



Grafo não direcionado

Um grafo não direcionado é uma estrutura (V, E), em que:

- V: conjunto finito de vértices;
- E: multi-conjunto finito de arestas, sendo cada aresta um multiconjunto de 2 vértices de V.

Terminologia

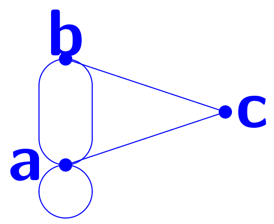
- **laço**: aresta da forma $\{v, v\}$.
- **vértices adjacentes**: vértices de uma mesma aresta.
- **aresta incidente** ao vértice v: aresta que contém v.
- **extremidade** de uma aresta: vértice da aresta.
- **grafo nulo**: aquele para o qual $\mathrm{V} = \emptyset$.

Representação geométrica de um grafo

- **vértice: representado por um círculo (ou ponto).**
- **aresta: representada por uma linha ligando os círculos representativos dos vértices.**

Exemplo:

- $G = (\mathrm{V}, \mathrm{E})$, **onde:**
  - $\mathrm{V} = \{a, b, c\}$
  - $\mathrm{E} = \{\{a, a\}, \{a, b\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}\}$
- **Uma representação geométrica:**



Alguns tipos de grafos

Um grafo simples é um grafo sem laços e sem arestas múltiplas.

Um grafo direcionado é um grafo cujas arestas são direcionadas (ou seja, E é um multi-conjunto de pares ordenados).

Um grafo valorado é um grafo em que cada aresta tem um valor associado.

Um grafo é imersível em uma superfície S, se puder ser representado geometricamente em S de forma que arestas se cruzem apenas nas extremidades.

Um grafo planar é um grafo que é imersível no plano.

Definições relativas a "caminhamentos"

- **Caminho** (walk): sequência de vértices e arestas ($n \geq 1$)

$$x_1\{x_1, x_2\}x_2\{x_2, x_3\}x_3 \ldots x_{n-1}\{x_{n-1}, x_n\}x_n.$$

(No caso de arestas múltiplas, deve-se indicar qual delas está sendo usada.)

  - Notação abreviada: $x_1x_2x_3 \ldots x_{n-1}x_n$.
  - x_1 e x_n: **extremidades** do caminho.
  - **Comprimento** do caminho: número de arestas do mesmo (isto é, $n-1$).

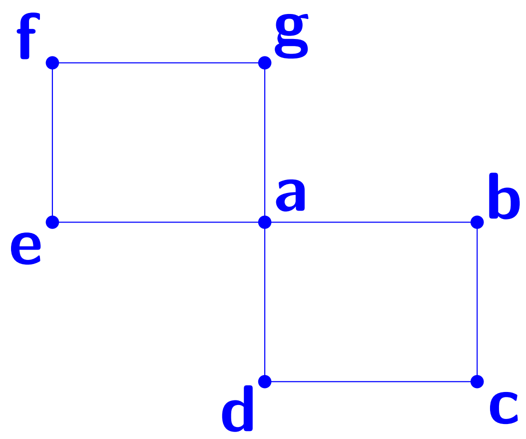
- **Caminho fechado**: caminho em que $x_1 = x_n$.

- **Caminho gerador** (spanning): caminho que contém todos os vértices do grafo.

Definições relativas a “caminhamentos”

- **Caminho simples (path):** caminho sem vértices repetidos.
- **Trajeto (trail):** caminho sem arestas repetidas.
- **Circuito:** trajeto fechado.
- **Ciclo:** circuito com pelo menos uma aresta, no qual o único vértice repetido é $x_1 = x_n$.
  - n-ciclo: ciclo de tamanho n.
  - 1-ciclo: laço.
  - 2-ciclo: par de arestas múltiplas.
  - 3-ciclo: chamado **triângulo**.
  - 4-ciclo: chamado **quadrilátero**, e assim por diante...

Um exemplo



- $a\{a,b\}b\{b,c\}c\{c,d\}d$: caminho de tamanho 3; abr.: $abcd$.
- $abcb$: caminho que não é simples, nem é trajeto.
- $abcdae$: trajeto que não é caminho simples.
- abc: caminho simples.
- aba: caminho fechado que não é circuito.
- $abcdaefga$: circuito que não é ciclo.
- $abcda$: 4-ciclo (quadrilátero).

Grafos Eulerianos e Hamiltonianos

Um circuito Euleriano é um circuito que inclui cada aresta exatamente uma vez.

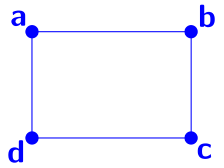
Um grafo Euleriano é um grafo que contém um circuito Euleriano.

Um ciclo Hamiltoniano é um ciclo gerador.

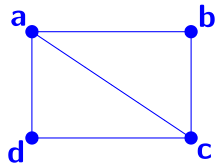
Um grafo Hamiltoniano é um grafo que contém um ciclo Hamiltoniano.

Exemplos

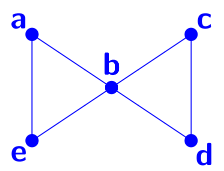
Os conceitos de grafo Euleriano e grafo Hamiltoniano são independentes:



Euleriano, Hamiltoniano



não Euleriano, Hamiltoniano



Euleriano, não Hamiltoniano

não Euleriano, não Hamiltoniano

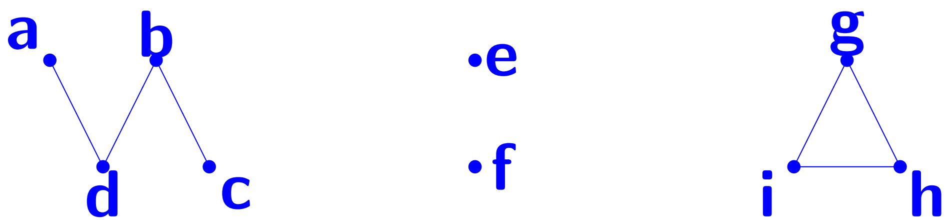
Tipos de grafos importantes

Grafo completo com n vértices (K_n): grafo simples em que cada vértice é adjacente a todos os outros. Tem, portanto, $C(n, 2)$ arestas.

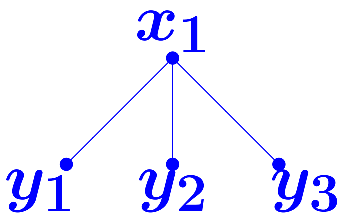
Grafo bipartido: grafo cujos vértices podem ser particionados em dois conjuntos, de forma que as extremidades de qualquer aresta não estejam no mesmo conjunto.

Grafo bipartido completo($K_{m,n}$): grafo bipartido em que cada vértice de um dos conjuntos é adjacente a todo vértice do outro conjunto. Tem, portanto, $m \times n$ arestas.

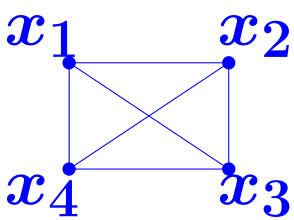
Exemplos



bipartido, não completo bipartido, não completo não bipartido, completo



$K_{1,3}$



K_4

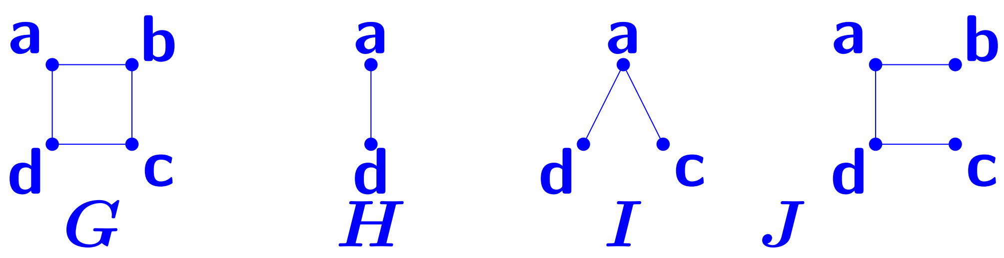
Reformulação dos 3 problemas

- $K_{3,3}$ é planar?
- O grafo das pontes de Königsberg é Euleriano?
- Para o grafo valorado completo representando os pontos do golfo do México, qual é o ciclo Hamiltoniano de menor tamanho?

Mais algumas definições

- G é **subgrafo** de H, $G \subseteq H$, se todos os vértices e arestas de G são vértices e arestas de H.
- Um subgrafo **gerador** (spanning) é um subgrafo que contém todos os vértices do grafo.

Exemplos:

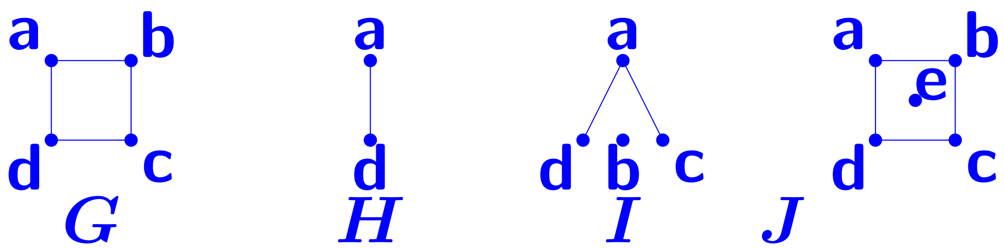


- $G \subseteq G$, $H \subseteq G$, $J \subseteq G$, $H \subseteq I$, $H \subseteq J$;
- J é um subgrafo gerador para G.

Grafo conectado (conexo)

Um grafo é **conectado** se existe caminho entre quaisquer dois vértices do mesmo. Caso contrário, é **desconectado**.

Exemplos:



- G: conectado, Euleriano, Hamiltoniano.
- H: conectado, não Euleriano, não Hamiltoniano;
- I: desconectado, não Euleriano, não Hamiltoniano;
- J: desconectado, Euleriano, não Hamiltoniano.

Componente conectado, complemento

Um **componente (conectado)** de um grafo é um subgrafo conectado "maximal". Ou seja, H é um componente de G se, e somente se,

- H é um subgrafo conectado de G; e
- nenhum outro subgrafo conectado de G contém H.

O **complemento** de um grafo simples $G = (\mathrm{V}, \mathrm{E})$ é o grafo simples

$$G^c = (\mathrm{V}, \mathrm{E}'),$$

onde $\{v, w\} \in E'$ se, e somente se, $\{v, w\} \notin E$. (Quantas arestas tem o complemento de um grafo simples?)

Um exemplo

- G é conectado (tem 1 componente)
- G^c é desconectado, e tem 2 componentes.

Subdivisão

Subdivisão de uma aresta $\{v, w\}$ de G: substituição de $\{v, w\}$ por duas arestas $\{v, z\}$ e $\{z, w\}$, sendo z um novo vértice adicionado a G.

Um grafo G_2 é um grafo subdivisão de G_1 quando G_2 é obtido de G_1 pela subdivisão das arestas de G_1.

Exemplo:

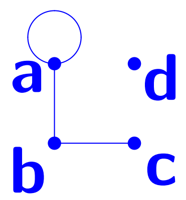
qual é o grafo subdivisão do grafo das pontes de Königsberg?

O LEMA DO APERTO DE MÃOS

Definições preliminares

- O **grau** de um vértice v, **grau**(v), é o número de arestas incidentes a v, com cada laço contado 2 vezes.
- Vértice **isolado**: vértice de grau 0;
- **Extremidade** de um grafo: vértice de grau 1;
- **Grafo regular** de grau n: grafo cujos vértices têm grau n.

Exemplos:

G: 

- Em G: grau$(a) = 3$, grau$(b) = 2$, grau$(c) = 1$ (c é extremidade de G), grau$(d) = 0$ (d é isolado);
- K_n é regular de grau $n - 1$ e $K_{n,n}$ é regular de grau n;
- $K_{m,n}$ não é regular, se $m \neq n$.

O LEMA DO APERTO DE MÃOS

Lema do aperto de mãos

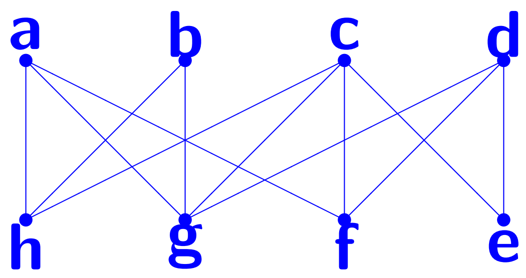
Em um grafo, a soma dos graus dos vértices é o dobro do número de arestas.

Prova

Cada aresta contribui com 2 unidades para a soma (inclusive os laços), por definição.

Exemplo:

Quantas arestas tem o grafo abaixo?



Um corolário

Corolário

Em um grafo, o número de vértices de grau ímpar é par.

Prova

Uma soma de números naturais é par se, e somente se, é par a quantidade de números ímpares. Pelo lema do aperto de mãos, a soma dos graus é par; logo, o número de vértices de grau ímpar é par.

Outro corolário

Corolário

Em um grupo, o número de pessoas que apertaram as mãos de um número ímpar de pessoas do grupo é par.

Prova

Modelagem: cada pessoa, um vértice; cada aperto de mãos, uma aresta (ligando os vértices correspondentes às pessoas que apertaram as mãos). Com isto, o grau de um vértice é o número de pessoas cujas mãos a pessoa representada pelo vértice apertou; e o corolário segue do anterior.

Sequência de graus de um grafo

Uma sequência de graus é uma sequência de números naturais em ordem decrescente.

Uma sequência de graus $g_1, g_2, \ldots, g_n$ é **gráfica** se existe um grafo simples com n vértices $v_1, v_2, \ldots, v_n$ tais que o grau de v_i é g_i.

Exemplos:

- $2, 1, 1$: sequência de graus gráfica;
- $2, 2, 2$: sequência de graus gráfica;
- $3, 3, 3$: sequência de graus não gráfica (pelo lema do aperto de mãos);
- $3, 3, 0$: sequência de graus não gráfica.

A sequência de graus de um grafo (não necessariamente simples) G é a sequência dos graus dos vértices de G, em ordem decrescente.

ISOMORFISMO

Isomorfismo

As propriedades essenciais de grafos são <u>estruturais</u>:

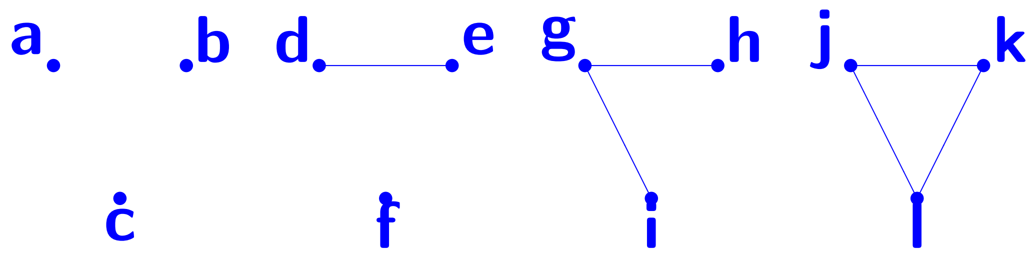
não dependem dos nomes dos vértices.

Dois grafos G e H são isomorfos, $G \cong H$, se e somente se:

- **existe uma correspondência um-para-um entre os vértices de G e H, tal que:**
- **o número de arestas entre dois vértices de G é idêntico ao número de arestas entre os vértices correspondentes de H.**

Exemplo

Os 4 grafos simples de 3 vértices, não isomorfos:

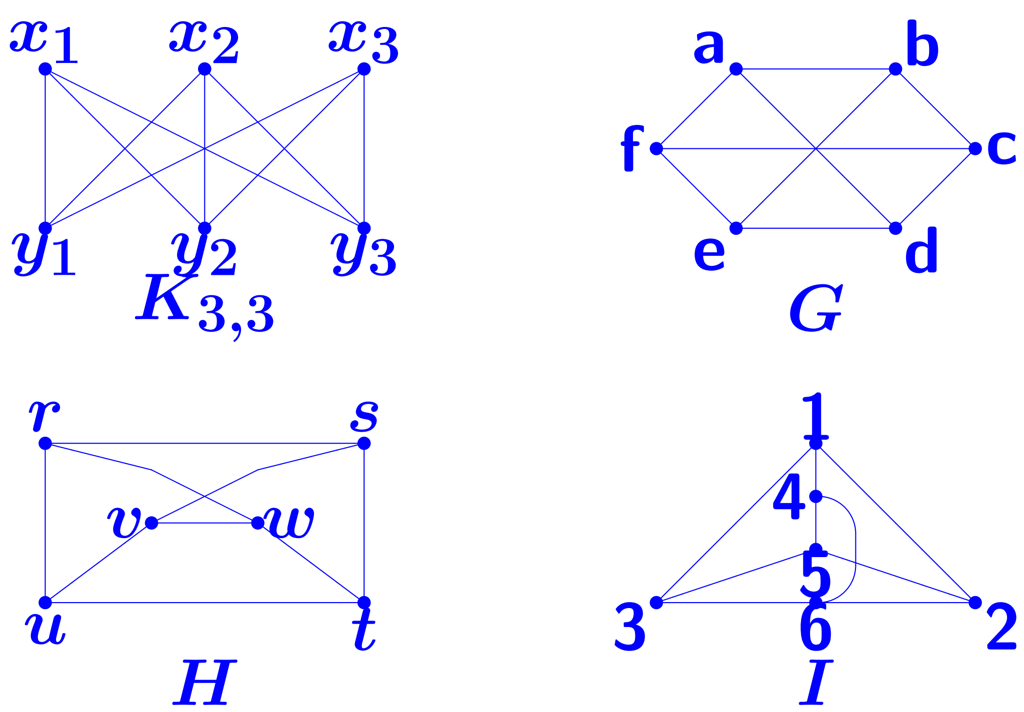


Algumas observações

- 2 grafos simples são isomorfos se, e somente se, seus complementos são isomorfos.
- A relação "é isomorfo a" é relação de equivalência:
  - reflexiva
  - simétrica
  - transitiva

Exemplo

G, H e I são isomorfos a $K_{3,3}$. Logo, eles são isomorfos entre si.



Como determinar se dois grafos são isomorfos?

- Verificar todas as $n!$ correspondências (n: número de vértices): intratável.

  $2^n < n! < 2^{n^2}$: logo, o número de correspondências é **exponencial** com relação ao número de vértices.

- Não existe (até o momento) técnica eficiente. Logo:

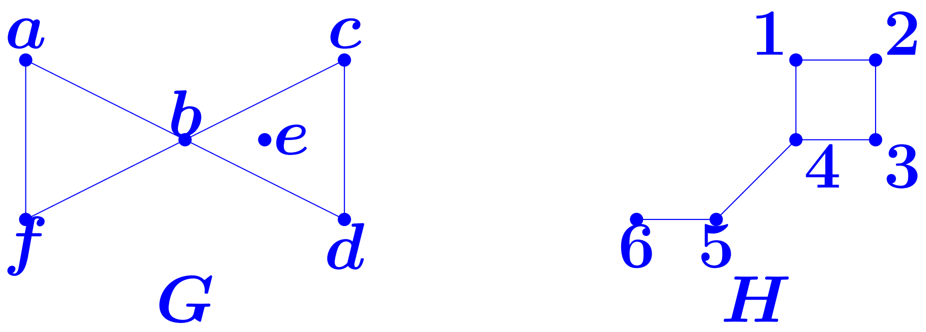
  usar bom senso e **heurísticas**.

Como determinar se dois grafos são isomorfos?

Para mostrar que dois grafos **não** são isomorfos:

- Comparar número de vértices, número de arestas, as sequências de graus dos grafos.
- Comparar números de componentes.
- Verificar alguns subgrafos simples.
- Comparar complementos.
- Etc...

Um exemplo



Razões pelas quais G e H não são isomorfos entre si:

- H é conectado e G não é.
- G contém um triângulo e H não contém.
- G contém um vértice de grau 4 e H não contém.
- G tem 2 componentes e H não tem.
- G^c tem um vértice de grau 5 e H^c não tem.
- Etc....

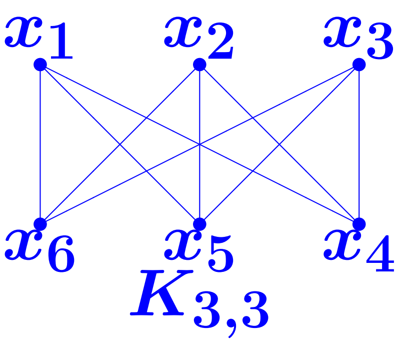
Isomorfismo é difícil

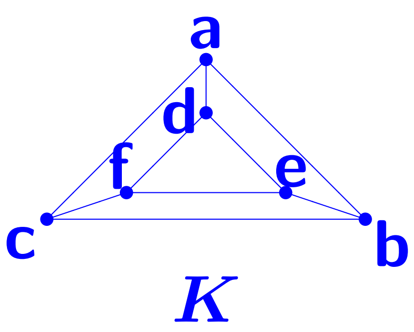
Como encontrar uma correspondência um-para-um, que demonstre que dois grafos são isomorfos?

- **Não existe técnica eficiente.**
- **Grafos de tamanho moderado: usar bom senso.**

Um exemplo

Dois grafos com número idêntico de vértices, arestas e sequência de graus, não isomorfos:





$K_{3,3}$ e K não são isomorfos:

K contém um triângulo, e $K_{3,3}$ não contém.

Outra razão: K é planar, $K_{3,3}$ não é...

PLANARIDADE

Planaridade

Um grafo é planar se, e somente se, pode ser imerso no plano.

Basta considerar grafos simples, pois:

- **Um grafo G é planar se, e somente se, o grafo simples obtido**
  - **removendo-se todos os laços de G, e**
  - **substituindo-se cada aresta múltipla de G por uma aresta,**

  é planar.
- **Um grafo é planar se, e somente se, sua subdivisão é planar.**

Determinar planaridade de grafos

Existem técnicas eficientes para determinar se um grafo simples é planar.

A seguir, algumas técnicas mais fáceis para seres humanos.

Em qualquer imersão, ciclos devem ser traçados como “círculos”:

- **traçar primeiro ciclos longos, depois tentar traçar o resto.**

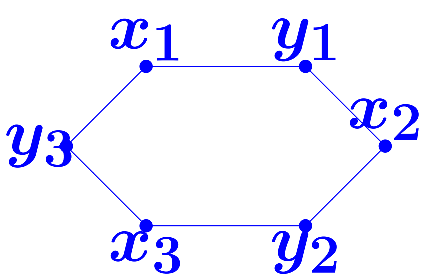
Um exemplo

Proposição:

$K_{3,3}$ não é planar.

Prova: (Método dos ciclos longos)

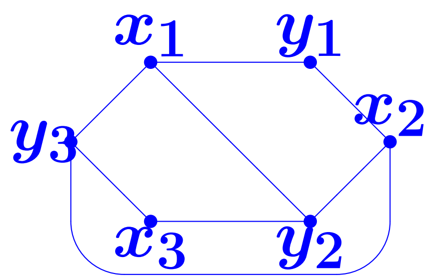
Em qualquer imersão, deve-se traçar o ciclo:



Continuação do exemplo

As 3 arestas restantes são: $\{x_1, y_2\}$, $\{x_2, y_3\}$ e $\{x_3, y_1\}$. Dois casos:

- $\{x_1, y_2\}$ dentro do ciclo.
  Então $\{x_2, y_3\}$ deve ser traçado fora:



  Não há como traçar $\{x_3, y_1\}$.
- $\{x_1, y_2\}$ fora do ciclo: análogo.

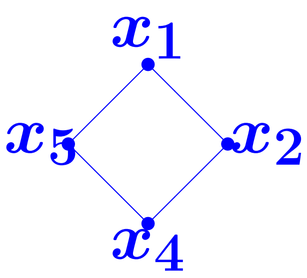
Outro exemplo

Proposição:

K_5 não é planar.

Prova:

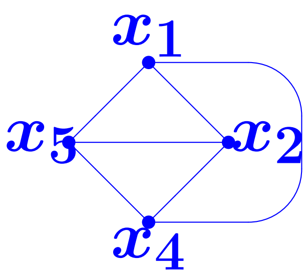
Em qualquer imersão, deve-se traçar o ciclo:



Continuação do exemplo

Faltam o vértice x_3 e as arestas $\{x_1, x_3\}$, $\{x_2, x_3\}$, $\{x_3, x_4\}$, $\{x_3, x_5\}$, $\{x_1, x_4\}$ e $\{x_2, x_5\}$. Dois casos:

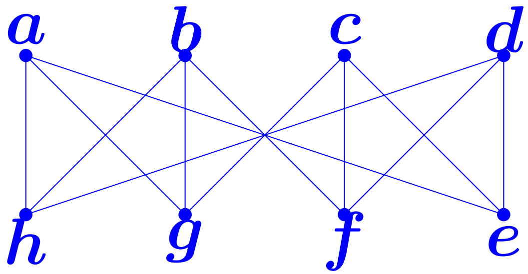
- **$\{x_2, x_5\}$ <u>dentro</u> do ciclo.**
  Então $\{x_1, x_4\}$ deve ser traçado fora:



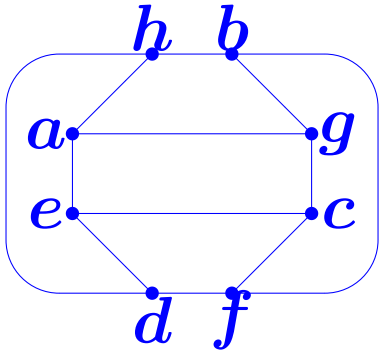
  Não há como colocar x_3.

- **$\{x_2, x_5\}$ <u>fora</u> do ciclo: análogo.**

Exemplo



Traçando o maior ciclo, e inserindo as arestas restantes:

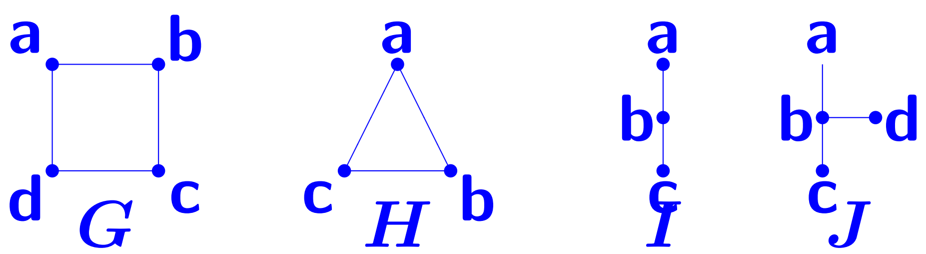


Homorfismo de grafos

Dois grafos, G e H, são **homomorfos** se, e somente se, existe um grafo I tal que:

- G é isomorfo a algum grafo obtido de I por meio de uma sequência de subdivisões de (zero ou mais) arestas de I.
- H é isomorfo a algum grafo obtido de I por meio de uma sequência de subdivisões de (zero ou mais) arestas de I.

Exemplo:



- G e H são homomorfos;
- I e J não são homomorfos.

Um teorema importante

Teorema de Kuratowski:

Um grafo não é planar se, e somente se, tem um subgrafo homomorfo a $K_{3,3}$ ou K_3.

Prova:

Veja [Liu, 1968], por exemplo.

Outro teorema

Fórmula de Euler:

Seja G um grafo conectado planar com V vértices e E arestas. Seja F o número de faces (regiões) em que o plano é dividido em uma imersão de G no plano. Então $V - E + F = 2$.

Prova:

Por indução sobre $N(E)$.
(No passo indutivo, considera-se 2 casos: grafos com e sem ciclos.)

Um corolário

Corolário:

Seja G um grafo simples planar com V vértices e E arestas, $E > 1$. Então $E \leq 3V - 6$.

Prova:

Segue do fato de que $3F \leq 2E$, e da fórmula de Euler.

FIM