

5. FUNÇÕES GERADORAS

- Introdução a funções geradoras
- Modelagem de problemas com funções geradoras
- Obtenção de coeficientes de funções geradoras
- Exemplos de uso de funções geradoras

Introdução a funções geradoras

Função geradora: representação de sequência como série de potência

- forma simples de modelar diversas classes de problemas combinatórios;
- idéia: transformação de problema combinatório em aritmética de polinômios.

Tipos:

- função geradora ordinária: modelagem de problemas de seleção;
- função geradora exponencial: modelagem de problemas de arranjo.

Exemplo 5.1

Número de soluções inteiras para

$$v_1 + v_2 = r, \quad 0 \leq v_1 \leq 1, \quad 1 \leq v_2 \leq 2$$

Solução 1: enumeração explícita

	v_1	v_2	r
$v_1 \in \{0, 1\}, v_2 \in \{1, 2\}$	0	1	1
	0	2	2
	1	1	2
	1	2	3

Exemplo 5.1(cont.)

Número de soluções inteiras para

$$v_1 + v_2 = r, \quad 0 \leq v_1 \leq 1, \quad 1 \leq v_2 \leq 2$$

Solução 2: multiplicação de polinômios

$$\begin{aligned}(x^0 + x^1)(x^1 + x^2) &= x^0x^1 + x^0x^2 + x^1x^1 + x^1x^2 \\ &= x^1 + x^2 + x^2 + x^3 \\ &= 1x^1 + 2x^2 + 1x^3\end{aligned}$$

expoente: somas possíveis

coeficiente: número de vezes em que a soma ocorre

$\Rightarrow$ coeficiente de x^i : número de soluções para $r = i$

$\Rightarrow$ solução de problema genérico

Exemplo 5.2

Número de soluções inteiras para

$$v_1 + v_2 = r, \quad v_1 \geq 0 \quad v_2 \geq 0$$

Solução 1: enumeração explícita

	v_1	v_2	r
	0	r	r
$v_1 \geq 0, v_2 \geq 0$	1	$r - 1$	r
		$\vdots$	
	r	0	r

$$\Rightarrow \text{no. soluções} = r + 1$$

Exemplo 5.2(cont.)

Número de soluções inteiras para

$$v_1 + v_2 = r, \quad v_1 \geq 0 \quad v_2 \geq 0$$

Solução 2: multiplicação de polinômios

$$(x^0 + x^1 + \dots)(x^0 + x^1 + \dots) = x^0 + 2x^1 + 3x^2 + \dots$$

$$\Rightarrow \text{número de soluções} = \text{coeficiente de } x^r = r + 1$$

Função geradora:

transformação de problema combinatório em manipulação de polinômio.

- permite expressar restrições variadas;
- envolve apenas álgebra;
- raciocínio combinatório implícito no polinômio;
- solução de problema genérico.

Definição:

a_r : solução para um problema combinatório ($r = 0, 1, 2, \dots$);

$g(x)$: **função geradora ordinária** para a_r :

$$g(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_rx^r + \dots$$

Exemplo:

função geradora para $a_r = C(n, r)$: $g(x) = (1 + x)^n$

$$(1 + x)^n = 1 + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + \dots + \binom{n}{r}x^r + \dots + \binom{n}{n}x^n$$

Estratégia para resolver problemas combinatórios usando função geradora:

1. encontrar uma função geradora para o problema geral.
2. extrair o coeficiente apropriado.

Modelagem de problemas com funções geradoras

Abordagem:

1. Modelar o problema como número de soluções inteiras para:

$$v_1 + v_2 + \dots + v_n = r, \quad v_i \in \{a_{i,1}, a_{i,2}, \dots\}$$

2. O número de soluções é o coeficiente de x^r em:

$$(x^{a_{1,1}} + x^{a_{1,2}} + \dots)(x^{a_{2,1}} + x^{a_{2,2}} + \dots) \dots (x^{a_{n,1}} + x^{a_{n,2}} + \dots)$$

Exemplo 5.3

Número de maneiras de selecionar r bolas dentre 3 verdes, 3 amarelas, 3 azuis e 3 pretas.

Solução:

1. modelagem: $v_1 + v_2 + v_3 + v_4 = r, \quad 0 \leq v_i \leq 3$
2. função geradora: $g(x) = (x^0 + x^1 + x^2 + x^3)^4$
3. número de seleções = coeficiente de x^r

Exemplo 5.4

Número de distribuições de 10 bolas idênticas em 3 caixas distintas, com um número par de bolas em cada caixa.

Solução:

1. modelagem: $v_1 + v_2 + v_3 = r, \quad v_i \in \{0, 2, 4, \dots\}$
2. função geradora: $g(x) = (1 + x^2 + x^4 + \dots)^3$
3. número de distribuições: coeficiente de x^{10}

Exemplo 5.5

Número de soluções inteiras para:

$$v_1 + 2v_2 + 3v_3 + 4v_4 = r, \quad v_i \geq 0$$

Solução:

1. reformulação do problema:

$$y_i = i v_i \quad y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = r, \quad y_i \in \{0, i, 2i, 3i, \dots\}$$

2. função geradora:

$$g(x) = (1+x+x^2+\dots)(1+x^2+x^4+\dots)(1+x^3+x^6+\dots)(1+x^4+x^8+\dots)$$

3. solução: coeficiente de x^r

Exemplo 5.6

Número de soluções inteiras para:

$$v_1 + v_2 + \dots + v_n \leq r, \quad 1 \leq v_i \leq 3$$

Solução:

1. reformulação do problema:

$$v_1 + v_2 + \dots + v_n + v_{n+1} = r \quad 1 \leq v_1, \dots, v_n \leq 3, \quad v_{n+1} \geq 0$$

2. função geradora:

$$g(x) = (x^1 + x^2 + x^3)^n (x^0 + x^1 + x^2 + x^3 + \dots)$$

3. solução: coeficiente de x^r

Exemplo 5.7

Número de maneiras de escolher 4 números distintos de $\{1, 2, \dots, n\}$, sem números consecutivos.

Solução:

1. modelagem:

$$\text{números: } 1 \leq n_1 < n_2 < n_3 < n_4 \leq n$$

$$\text{diferenças: } d_1 = n_2 - n_1, d_2 = n_3 - n_2, d_3 = n_4 - n_3, \quad d_i \geq 2$$

$$\text{equação: } n_1 + d_1 + d_2 + d_3 \leq n$$

$$n_1 + d_1 + d_2 + d_3 + d_4 = n \quad n_1 \geq 1, \quad d_1, d_2, d_3 \geq 2, \quad d_4 \geq 0$$

2. função geradora:

$$g(x) = (x^1 + x^2 + x^3 + \dots)(x^2 + x^3 + x^4 + \dots)^3 (x^0 + x^1 + x^2 + \dots)$$

3. solução: coeficiente de x^n

Obtenção de coeficientes de funções geradoras

• **Objetivo:**

extrair os coeficientes sem efetuar a multiplicação dos polinômios.

• **Idéia:**

reduzir a função geradora a forma binomial ou produto de funções binomiais.

Identidades úteis para a extração de coeficientes

1. $(1+x)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + \dots + \binom{n}{r}x^r + \dots + \binom{n}{n}x^n$
2. $(1+x+x^2+\dots)^n = \left(\binom{n}{0}\right) + \left(\binom{n}{1}\right)x + \left(\binom{n}{2}\right)x^2 + \dots + \left(\binom{n}{r}\right)x^r + \dots$
3. $(1-x^m)^n = \binom{n}{0} - \binom{n}{1}x^m + \binom{n}{2}x^{2m} + \dots + (-1)^n \binom{n}{m}x^{nm}$
4. $(1+x+\dots+x^{m-1})^n = (1-x^m)^n(1+x+x^2+\dots)^n$
5. $\frac{1}{1-x} = 1+x+x^2+\dots$
6. $\frac{1}{(1-x)^n} = (1+x+x^2+\dots)^n = \left(\binom{n}{0}\right) + \left(\binom{n}{1}\right)x + \left(\binom{n}{2}\right)x^2 + \dots$
7. $\frac{1-x^{n+1}}{1-x} = 1+x+x^2+\dots+x^n$
8. $g(x) = (a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots)(b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots)$
coeficiente de x^r em $g(x) = a_0b_r + a_1b_{r-1} + \dots + a_rb_0$

Exemplo 5.8

$g(x) = (x^2 + x^3 + x^4 + \dots)^5$ determinar coef. x^{16} e coef. x^r

Solução:

$$\begin{aligned}(x^2 + x^3 + x^4 + \dots)^5 &= [x^2(1+x+x^2+\dots)]^5 \\ &= (x^2)^5 \left(\frac{1}{1-x}\right)^5 = x^{10} \frac{1}{(1-x)^5}\end{aligned}$$

a) coef. x^{16} em $g(x)$ = coef. x^6 em $\frac{1}{(1-x)^5} = \binom{5}{6}$ (ident. 6)

b) coef. x^r em $g(x)$ = coef. x^{r-10} em $\frac{1}{(1-x)^5} = \binom{5}{r-10}$

Exemplo 5.8(cont.)

$g(x) = (x^2 + x^3 + x^4 + \dots)^5$ determinar coeficiente x^r

Solução:

$$g(x) = (x^2 + x^3 + x^4 + \dots)^5 = x^{10} \frac{1}{(1-x)^5}$$

coef. x^r em $g(x)$ = coef. x^{r-10} em $\frac{1}{(1-x)^5} = \binom{5}{r-10}$ (ident. 6)

Observação:

$g(x) = (x^2 + x^3 + x^4 + \dots)^5$ é função geradora para a_r

a_r = no. distribuições de r objetos idênticos em 5 caixas distintas com no mínimo 2 objetos por caixa ($v_1 + v_2 + v_3 + v_4 + v_5 = r$ $v_i \geq 2$)

expoente $(r-10)$ equivale a "truque" de colocar 2 objetos em cada caixa → álgebra substitui raciocínio combinatório!

Exemplo 5.9

Número de maneiras de obter \$15 de 20 pessoas;
19 pessoas podem dar \$1; 1 pessoa pode dar \$1 ou \$5.

Solução:

1. modelagem: $v_1 + v_2 + \dots + v_{20} = r$, $v_i = 0, 1$, $v_{20} = 0, 1, 5$

2. função geradora: $g(x) = (1+x)^{19}(1+x+x^5)$

3. número de maneiras = coeficiente de x^{15} em $g(x)$

$$g(x) = f(x)h(x)$$

$$f(x) = (1+x)^{19} = 1 + \binom{19}{1}x + \binom{19}{2}x^2 + \dots + \binom{19}{19}x^{19} = \sum_{r=0}^{\infty} a_r x^r$$

$$h(x) = (1+x+x^5) = \sum_{r=0}^{\infty} b_r x^r$$

$$\text{coef. } x^{15} = a_0b_{15} + a_1b_{14} + \dots + a_{15}b_0 = a_{15}b_0 + a_{14}b_1 + a_{10}b_5$$

$$\text{coef. } x^{15} = \binom{19}{15} \cdot 1 + \binom{19}{4} \cdot 1 + \binom{19}{10} \cdot 1$$

Exemplo 5.9(cont.)

Número de maneiras de obter \$15 de 20 pessoas;
19 pessoas podem dar \$1; 1 pessoa pode dar \$1 ou \$5.

Solução:

1. modelagem: $v_1 + v_2 + \dots + v_{20} = r, \quad v_i = 0, 1, \quad v_{20} = 0, 1, 5$

2. função geradora: $g(x) = (1+x)^{19}(1+x+x^5)$

3. número de maneiras = coeficiente de x^{15} em $g(x)$
coef. $x^{15} = \binom{19}{15}.1 + \binom{19}{4}.1 + \binom{19}{10}.1$

• raciocínio combinatório:
última pessoa pode dar 0, 1 ou 5; pessoas restantes completam \$15.

no. maneiras = $\binom{19}{15} + \binom{19}{4} + \binom{19}{10}$

Composição de funções geradoras

$g(x)$: função geradora para a_n

$h(x)$: função geradora para b_n

1. $C_1.g(x) + C_2.h(x) = \text{f.g. para } C_1a_n + C_2b_n \quad C_1, C_2 \text{ constantes}$

2. $g(x).h(x) = \text{f.g. para } a_0b_n + a_1b_{n-1} + \dots + a_nb_0$

3. $\frac{g(x)}{1-x} = \text{f.g. para } a_0 + a_1 + \dots + a_n$

4. $(1-x)g(x) = \text{f.g. para } a_n - a_{n-1}$

5. $xg'(x) = \text{f.g. para } na_n$

Exemplo 5.10

Função geradora para $a_n = 2n + 3$

Solução:

$$a_n = 1 \Rightarrow f_1(x) = \frac{1}{1-x}$$

$$a_n = n \Rightarrow f_2(x) = xf_1'(x) = \frac{x}{(1-x)^2}$$

$$a_n = 2n + 3 \Rightarrow g(x) = 2f_2(x) + 3f_1(x) = \frac{2x}{(1-x)^2} + \frac{3}{1-x}$$

Exemplo 5.11

Função geradora para $a_n = n^2$

Solução:

$$a_n = 1 \Rightarrow f_1(x) = \frac{1}{1-x}$$

$$a_n = n \Rightarrow f_2(x) = xf_1'(x) = \frac{x}{(1-x)^2}$$

$$a_n = n^2 \Rightarrow g(x) = xf_2'(x) = \frac{x+x^2}{(1-x)^3}$$

Exemplo 5.12

$$S = \sum_{k=1}^n k^2 = 1^2 + 2^2 + \dots + n^2$$

Solução:

$$a_n = n^2 \Rightarrow g(x) = \frac{x+x^2}{(1-x)^3}$$

$$b_n = 1^2 + 2^2 + \dots + n^2 \Rightarrow h(x) = \frac{g(x)}{1-x} = (x+x^2) \cdot \frac{1}{(1-x)^4}$$

 b_n = coeficiente de x^n em $h(x)$:

$$b_n = \left(\binom{4}{n-1}\right) + \left(\binom{4}{n-2}\right) = \binom{n+2}{n-1} + \binom{n+1}{n-2} = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

$$\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

Exemplo 5.13

$$S = \sum_{k=0}^n k2^k$$

Solução:

$$a_n = 2^n \Rightarrow f_1(x) = \frac{1}{1-2x}$$

$$a_n = n2^n \Rightarrow f_2(x) = xf_1'(x) = \frac{2x}{(1-2x)^2}$$

$$b_n = \sum_{k=0}^n k2^k \Rightarrow g(x) = \frac{f_2(x)}{1-x} = \frac{2x}{(1-2x)^2(1-x)}$$

$$g(x) = \frac{2x}{(1-2x)^2(1-x)} = \frac{2}{1-x} - \frac{4}{1-2x} + \frac{2}{(1-2x)^2}$$

$$b_n = \text{coef. } x^n \text{ em } g(x) = 2 - 4 \cdot 2^n + 2 \cdot 2^n \binom{2}{n} = 2 + (2n-2)2^n$$

$$\sum_{k=0}^n k2^k = 2 + (2n-2)2^n$$

Exemplos de uso de funções geradoras

- seleção ou distribuição com restrições
- avaliação de somatório
- verificação de identidade binomial

Exemplo 5.14

Problema dos dados de Galileu: (exemplo 4.23)
probabilidade de soma 10 no lançamento de 3 dados distintos.

Solução:

$$1. \text{ modelagem: } v_1 + v_2 + v_3 = r, \quad 1 \leq v_i \leq 6$$

$$2. \text{ função geradora: } g(x) = (x + x^2 + \dots + x^6)^3$$

$$3. \text{ no. maneiras de obter soma 10} = \text{coef. } x^{10} \text{ em } g(x)$$

$$\begin{aligned} (x + x^2 + \dots + x^6)^3 &= x^3(1 + x + \dots + x^5)^3 \\ &= x^3(1 - x^6)^3(1 + x + x^2 + \dots)^3 \end{aligned}$$

$$\text{coef. } x^{10} = \binom{3}{0} \binom{3}{7} - \binom{3}{1} \binom{3}{1} = 27$$

$$\text{prob(soma 10)} = \frac{27}{6^3} = \frac{1}{8}$$

Exemplo 5.15

Número de maneiras de escolher 4 números distintos de $\{1, 2, \dots, n\}$, sem números consecutivos. (exemplo 5.7)

Solução:

1. modelagem:

números: $1 \leq n_1 < n_2 < n_3 < n_4 \leq n$

diferenças: $d_1 = n_2 - n_1, d_2 = n_3 - n_2, d_3 = n_4 - n_3, d_i \geq 2$

equação: $n_1 + d_1 + d_2 + d_3 \leq n$

$n_1 + d_1 + d_2 + d_3 + d_4 = n \quad n_1 \geq 1, d_1, d_2, d_3 \geq 2, d_4 \geq 0$

2. função geradora:

$$g(x) = (x^1 + x^2 + \dots)(x^2 + x^3 + \dots)^3(x^0 + x^1 + \dots)$$

$$g(x) = x^7(1 + x + x^2 + \dots)^5$$

3. $a_n = \text{coef. } x^n = \left(\binom{5}{n-7}\right)$

Exemplo 5.15(cont.)

Número de maneiras de escolher 4 números distintos de $\{1, 2, \dots, n\}$, sem números consecutivos. (exemplo 5.7)

Solução:

$$\bullet 1 \leq n_1 < n_2 < n_3 < n_4 \leq n$$

$$\bullet g(x) = (x + x^2 + \dots)(x^2 + x^3 + \dots)^3(1 + x + \dots)$$

$$\bullet a_n = \text{coef. } x^n = \left(\binom{5}{n-7}\right)$$

Raciocínio combinatório - problema equivalente:

no. sequências binárias de tamanho n com 4 1's não consecutivos.

- dispor 4 1's;

- colocar 3 0's separadores;

- distribuir $n-7$ 0's restantes.

$$N = \left(\binom{5}{n-7}\right)$$

Exemplo 5.16

Avaliar $S = 1.2.3 + 2.3.4 + \dots + (n-2)(n-1)n$ (exemplo 4.36)

Solução:

$$(n-2)(n-1)n = n^3 - 3n^2 + 2n$$

$$a_n = 1 \Rightarrow f_1(x) = \frac{1}{1-x}$$

$$a_n = n \Rightarrow f_2(x) = x f_1'(x) = \frac{x}{(1-x)^2}$$

$$a_n = n^2 \Rightarrow f_3(x) = x f_2'(x) = \frac{x+x^2}{(1-x)^3}$$

$$a_n = n^3 \Rightarrow f_4(x) = x f_3'(x) = \frac{x+4x^2+x^3}{(1-x)^4}$$

$$a_n = n^3 - 3n^2 + 2n \Rightarrow g(x) = \frac{6x^3}{(1-x)^4}$$

Exemplo 5.16(cont.)

Avaliar $S = 1.2.3 + 2.3.4 + \dots + (n-2)(n-1)n$ (exemplo 4.36)

Solução:

$$a_n = (n-2)(n-1)n = n^3 - 3n^2 + 2n \Rightarrow g(x) = \frac{6x^3}{(1-x)^4}$$

$$b_n = 1.2.3 + 2.3.4 + \dots + (n-2)(n-1)n \Rightarrow h(x) = \frac{g(x)}{1-x} = \frac{6x^3}{(1-x)^5}$$

$b_n = \text{coeficiente de } x^n \text{ em } h(x):$

$$b_n = 6 \left(\binom{5}{n-3}\right) = 6 \binom{n+1}{n-3} = 6 \binom{n+1}{4}$$

$$\sum_{i=3}^n (i-2)(i-1)i = 6 \binom{n+1}{4}$$

Exemplo 5.17

Verificar: $\binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \dots + \binom{n}{n}^2 = \binom{2n}{n}$

Solução:

$\binom{n}{r} = a_r = \text{coef. de } x^r \text{ em } (1+x)^n$

$f(x) = g(x) = (1+x)^n \quad h(x) = f(x)g(x) = (1+x)^{2n}$

$b_n = \text{coef. } x^n \text{ em } f(x)g(x) = \binom{n}{0}\binom{n}{n} + \binom{n}{1}\binom{n}{n-1} + \dots + \binom{n}{n}\binom{n}{0}$

$b_n = \binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \dots + \binom{n}{n}^2$

$h(x) = (1+x)^{2n} \quad b_n = \text{coef. } x^n \text{ em } h(x) = \binom{2n}{n}$

$$\sum_{i=0}^n \binom{n}{i}^2 = \binom{2n}{n}$$

FIM