

8. RELAÇÕES DE RECORRÊNCIA

- Introdução a relações de recorrência
- Modelagem com relações de recorrência
- Solução de relações de recorrência
- Exemplos e aplicações

INTRODUÇÃO A RELAÇÕES DE RECORRÊNCIA

Relação de recorrência (rr):

fórmula recursiva que expressa número de configurações relativas a procedimento envolvendo n objetos em termos do número de configurações relativas ao procedimento com menos objetos.

Exemplo:

Determinada população dobra a cada ano; população inicial = 5
 a_n = população depois de n anos

Relação de recorrência: $a_n = 2a_{n-1} \quad a_0 = 5$

- **Indução matemática:**
técnica de prova que verifica validade de proposição para n baseada na validade da proposição para valores menores que n .
- **Relação de recorrência:**
técnica de contagem que determina contagem para n baseada na contagem para valores menores que n .
- **Algoritmo recursivo:**
procedimento que determina a solução de um problema de tamanho n em termos da solução do problema para valores menores que n .

Relação de recorrência para a_n e condições iniciais permitem:

- determinar o valor de a_n para valores pequenos de n , calculando valores de a_n sucessivamente;
- escrever algoritmo recursivo para calcular a_n ;
- determinar fórmula explícita para a_n (em termos de n);
- provar por indução propriedades de a_n .

Exemplo:

sequência de Fibonacci:

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \quad n \geq 3$$

$$a_1 = a_2 = 1$$

- **Relação de recorrência:**
 - fórmula recursiva: função de $a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_{n-r}$
 - condições iniciais: valores de a_0, a_1, a_{r-1}
- **Solução da relação de recorrência:**
fórmula explícita para a_n (em termos de n)

Exemplo:

tamanho de população que dobra a cada ano; população inicial = 5

$$\begin{array}{ll} \text{fórmula recursiva:} & a_n = 2a_{n-1} \\ \text{condições iniciais:} & a_0 = 5 \\ \text{solução:} & a_n = 5 \times 2^n \quad n \geq 0 \end{array}$$

Exemplo 8.1

Número de sequências binárias de n dígitos sem 1's consecutivos.

Solução:

sequências: $0xx \dots x$ ou $10xx \dots x$

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \quad n \geq 3$$

$$a_1 = 2 \quad a_2 = 3$$

MODELAGEM COM RELAÇÕES DE RECORRÊNCIA

Tipos mais comuns de relação de recorrência:

- $a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \dots + c_r a_{n-r} \quad c_i \text{ constantes}$
- $a_n = g_1(n) a_{n-1} + g_2(n) a_{n-2} + \dots + g_r(n) a_{n-r}$
- $a_n = c a_{n-1} + f(n)$
- $a_n = c a_{n/d} + f(n) \quad c, d \text{ constantes}$
- $a_{n,r} = a_{n-1,r} + a_{n-1,r-1}$
- $a_n = a_0 a_{n-1} + a_1 a_{n-2} + \dots + a_{n-1} a_0$

Relação de recorrência linear de grau r de uma variável:

$$a_n = g_1(n) a_{n-1} + g_2(n) a_{n-2} + \dots + g_r(n) a_{n-r} + f(n), \quad g_r(n) \neq 0$$

- **funções $g_1, \dots, g_r$ constantes**
 $a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \dots + c_r a_{n-r} + f(n)$
→ rr linear de coeficientes constantes.
- $f(n) = 0 \rightarrow$ rr homogênea;
 $f(n) \neq 0 \rightarrow$ rr não homogênea.

Exemplo 8.2

Número de permutações de n objetos.

Solução:

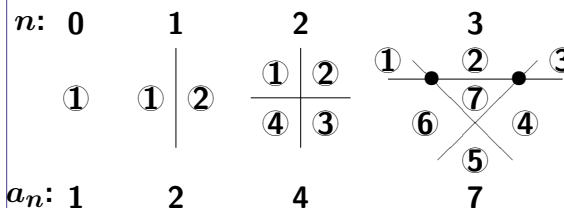
escolher primeiro objeto e permutar $(n-1)$ restantes.

$$a_n = n a_{n-1} \quad n > 1$$

$$a_1 = 1$$

Exemplo 8.3

Número de regiões em que o plano é dividido por n retas;
há interseção entre cada par de retas;
mais de duas retas não se interceptam em um único ponto.

Exemplo 8.3 (cont.)

Número de regiões em que o plano é dividido por n retas;
há interseção entre cada par de retas;
mais de duas retas não se interceptam em um único ponto.

Solução:

linha n intercepta as $(n-1)$ linhas anteriores em pontos diferentes;

→ linha n dividida em n segmentos;

→ cada segmento divide região em duas.

$$a_n = a_{n-1} + n \quad n \geq 1$$

$$a_0 = 1$$

Exemplo 8.4

Torre de Hanoi:

Hastes A, B, C; pilha de n discos de diâmetros diferentes na haste A,
ordenados por diâmetro (maior na base);
pode-se mover um disco de cada vez, sem colocar maior sobre menor;
→ mover pilha de A para B, podendo usar C; no. movimentos = ?

Solução:

mover (recursivamente) $n-1$ discos de A para C (usando B);
mover disco da base de A para B;
mover (recursivamente) $n-1$ discos de C para B (usando A).

$$a_n = \text{no. movimentos}$$

$$a_n = 2 a_{n-1} + 1 \quad n \geq 2$$

$$a_1 = 1$$

Exemplo 8.5

Pesquisa binária:

número de comparações para determinar se elemento x está em lista ordenada de tamanho n (supor n potência de 2).

```
se a lista tem apenas 1 elemento então
  compare x com o elemento da lista;
  retorne a resposta apropriada;
senão
  seja m o elemento do meio da lista;
  se x < m
    então chame o algoritmo recursivamente na 1a. metade;
  senão chame o algoritmo recursivamente na 2a. metade;
fimse
fimse
```

Exemplo 8.5 (cont.)

Pesquisa binária:

número de comparações para determinar se elemento x está em lista ordenada de tamanho n (supor n potência de 2).

Solução:

$a_n =$ número de comparações

$$a_n = a_{n/2} + 1 \quad n \geq 2$$

$$a_1 = 1$$

Exemplo 8.6

Relação de recorrência com mais de uma variável:

no. combinações de r objetos de um total de n objetos distintos.

Solução:

$a_{n,r} =$ número de combinações

$$a_{n,r} = a_{n-1,r} + a_{n-1,r-1} \quad n \geq 1, \quad r \leq n$$

$$a_{n,0} = a_{n,n} = 1$$

Exemplo 8.7

Relações de recorrência simultâneas:

número de sequências ternárias (dígitos 0, 1, 2) de n dígitos com número par de 0's e número par de 1's.

Solução:

sequências: $2xx \dots x$ ou $1xx \dots x$ ou $0xx \dots x$

$a_n =$ no. sequências com no. par de 0's e no. par de 1's;

$b_n =$ no. sequências com no. par de 0's e no. ímpar de 1's;

$c_n =$ no. sequências com no. ímpar de 0's e no. par de 1's;

$$a_n = a_{n-1} + b_{n-1} + c_{n-1} \quad n \geq 2$$

$$a_1 = b_1 = c_1 = 1$$

Obs.:

no. sequências com no. ímpar de 0's e no. ímpar de 1's:

$$d_n = 3^n - (a_n + b_n + c_n)$$

Exemplo 8.8

Número de maneiras de colocar parênteses indicando ordem de adição.

$$w_1 + w_2 + \cdots + w_n$$

n :	1	2	3	4
	w_1	$(w_1 + w_2)$	$((w_1 + w_2) + w_3)$	$((w_1 + w_2) + w_3) + w_4$
			$(w_1 + (w_2 + w_3))$	$((w_1 + (w_2 + w_3)) + w_4)$
				$((w_1 + w_2) + (w_3 + w_4))$
				$(w_1 + (w_2 + (w_3 + w_4)))$
				$(w_1 + ((w_2 + w_3) + w_4))$
a_n :	1	1	2	5

Exemplo 8.8 (cont.)

Número de maneiras de colocar parênteses indicando ordem de adição.

$$w_1 + w_2 + \cdots + w_n$$

Solução 1:

subdividir problema em partes de tamanho r e $(n-r)$:

$a_r =$ no. colocações de parênteses em $w_1 + \cdots + w_r$

$a_{n-r} =$ no. colocações de parênteses em $w_{r+1} + \cdots + w_n$

$$a_n = \sum_{r=1}^{n-1} (a_r a_{n-r}) \quad n \geq 2$$

$$a_1 = 1$$

Exemplo 8.8 (cont.)

Número de maneiras de colocar parênteses indicando ordem de adição.

$$w_1 + w_2 + \cdots + w_n$$

Solução 1:

$$a_n = \sum_{r=1}^{n-1} (a_r a_{n-r}) \quad n \geq 2$$

$$a_1 = 1$$

Verificação:

$$a_2 = a_1 a_1 = 1$$

$$a_3 = a_1 a_2 + a_2 a_1 = 2$$

$$a_4 = a_1 a_3 + a_2 a_2 + a_3 a_1 = 5$$

Exemplo 8.8 (cont.)

Número de maneiras de colocar parênteses indicando ordem de adição.

$$w_1 + w_2 + \cdots + w_n$$

Solução 1:

$$a_n = \sum_{r=1}^{n-1} (a_r a_{n-r}) \quad n \geq 2$$

$$a_1 = 1$$

Outra forma: fazer $a_0 = 0$

$$a_n = \sum_{r=0}^n (a_r a_{n-r}) \quad n \geq 2$$

$$a_0 = 0 \quad a_1 = 1$$

Exemplo 8.8 (cont.)

Número de maneiras de colocar parênteses indicando ordem de adição.

$$w_1 + w_2 + \cdots + w_n$$

Solução 2 (incorreta):

colocação de parênteses $\leftrightarrow$ ordem de avaliação das adições
 no. colocações de parênteses = no. permutações de $(n-1)$ adições
 $P(n-1, n-1) = (n-1)!$
 $n = 4 \rightarrow (n-1)! = 6 \quad (a_4 = 5)$

problema:

permutações 132 e 312: mesma colocação de parênteses

132: $((w_1 + w_2) + (w_3 + w_4))$

312: $((w_1 + w_2) + (w_3 + w_4))$

Exemplo 8.9

Permutações caóticas:

Número de permutações dos números de 1 a n tal que nenhum número ocupe sua posição natural (i não está na i -ésima posição).

Formulações equivalentes:

- no. maneiras de colocar n cartas diferentes em n envelopes sobrescritos tal que nenhuma carta esteja no envelope correto;
- no. maneiras de n pessoas pegarem guarda-chuva no escuro tal que nenhuma pessoa pegue seu guarda-chuva.

Exemplos:

$n=2$; perm.: 21

$n=3$; perm.: 312, 231

$n=4$; perm.: 2143, 2341, 2413, 3142, 3412, 3421, 4123, 4312, 4321

Exemplo 8.9 (cont.)

Permutações dos números 1 a n tal que i não está na i -ésima posição.

Solução:

D_n = no. permutações caóticas de n números $(1, 2, \dots, n)$

• $D_0 = 1 \quad D_1 = 0$

- $n \geq 2$: número n pode ficar nas posições 1 a $n-1$.

Suponha n na posição 1:

- caso 1: 1 na posição n : D_{n-2} permutações para 2 a $n-1$.
- caso 2: 1 fora da posição n : D_{n-1} permutações. (2 a $n-1$ fora de suas posições e 1 fora da posição n)

• $D_n = (n-1)(D_{n-1} + D_{n-2}) \quad n \geq 2$

Exemplo 8.9 (cont.)

Permutações dos números 1 a n tal que i não está na i -ésima posição.

Solução:

$$D_n = (n-1)(D_{n-1} + D_{n-2}) \quad n \geq 2$$

$$D_0 = 1 \quad D_1 = 0$$

Verificação:

$$D_2 = 1 \times (D_1 + D_0) = 1$$

$$D_3 = 2 \times (D_2 + D_1) = 2$$

$$D_4 = 3 \times (D_3 + D_2) = 9$$

Exemplo 8.9 (cont.)

Permutações dos números 1 a n tal que i não está na i -ésima posição.

Solução - outra forma:

$$\begin{aligned} D_0 &= 1 & D_1 &= 0 \\ D_n &= (n-1)(D_{n-1} + D_{n-2}) \\ D_n - nD_{n-1} &= -(D_{n-1} - (n-1)D_{n-2}) \\ &= -(-(D_{n-2} - (n-2)D_{n-3})) \\ &\vdots \\ &= -(-(\cdots - (D_1 - (1)D_0))) \\ &= (-1)^n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_n &= n D_{n-1} + (-1)^n & n &\geq 1 \\ D_0 &= 1 \end{aligned}$$

SOLUÇÃO DE RELAÇÕES DE RECORRÊNCIA

Solução da relação de recorrência:

fórmula explícita para a_n (em termos de n).

Métodos de solução:

- Métodos simples

1. Supor solução e provar por indução.

2. Substituições sucessivas.

- Métodos gerais - para os seguintes tipos:

1. $a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_r a_{n-r}$ c_i constantes

2. $a_n = c a_{n-1} + f(n)$

3. $a_n = c a_{n/d} + f(n)$ c, d constantes

- Outros métodos

Exemplo 8.10

Torre de Hanoi: a_n = número de movimentos (exemplo 8.4)

$$a_1 = 1 \quad a_n = 2 a_{n-1} + 1 \quad n \geq 2$$

Solução com verificação por indução:

$$\begin{aligned} a_1 &= 1 \\ a_2 &= 2 a_1 + 1 = 3 \\ a_3 &= 2 a_2 + 1 = 7 \\ a_4 &= 2 a_3 + 1 = 15 \end{aligned}$$

$$\text{suposição: } a_5 = 31 = 2^5 - 1 \quad a_n = 2^n - 1 \quad (P(n))$$

demonstração: $P(n-1) \Rightarrow P(n)$

$$\begin{aligned} a_{n-1} &= 2^{n-1} - 1 \\ \Rightarrow a_n &= 2 a_{n-1} + 1 = 2 (2^{n-1} - 1) + 1 = 2^n - 1 \end{aligned}$$

Exemplo 8.11

$$\begin{aligned} a_n &= n + a_{n-1} & n &\geq 1 & (\text{exemplo 8.3}) \\ a_0 &= 1 \end{aligned}$$

Solução por substituições sucessivas:

$$\begin{aligned} a_n &= n + a_{n-1} \\ &= n + ((n-1) + a_{n-2}) \\ &\vdots \\ &= n + (n-1) + \cdots + 1 + a_0 \end{aligned}$$

$$a_n = \frac{n(n+1)}{2} + 1 \quad n \geq 0$$

Exemplo 8.12

$$a_n = 2 a_{n-1} \quad n \geq 1$$

$$a_0 = 5$$

Solução por substituições sucessivas:

$$a_n = 2 a_{n-1}$$

$$= 2 \cdot 2 a_{n-2}$$

$$\vdots$$

$$= 2 \cdot 2 \cdots 2 a_0$$

$$a_n = 5 \times 2^n \quad n \geq 1$$

→ solução da forma α^n para rr da forma $a_n = c \cdot a_{n-1}$

Solução de rr linear homogênea de coeficientes constantes

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_r a_{n-r}$$

1. Determinação de soluções individuais

forma da solução: $a_n = \alpha^n$

$$\alpha^n = c_1 \alpha^{n-1} + c_2 \alpha^{n-2} + \cdots + c_r \alpha^{n-r}$$

equação característica: $\alpha^r = c_1 \alpha^{r-1} + c_2 \alpha^{r-2} + \cdots + c_r$

raízes: $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r \rightarrow$ soluções individuais

2. Determinação de solução geral

a_n : combinação linear das soluções individuais

$$a_n = A_1 \alpha_1^n + A_2 \alpha_2^n + \cdots + A_r \alpha_r^n$$

valores iniciais: $a'_0, a'_1, \dots, a'_{r-1}$

r equações: $a'_k = A_1 \alpha_1^k + A_2 \alpha_2^k + \cdots + A_r \alpha_r^k \quad 0 \leq k \leq r-1$

→ determina-se $A_i \quad 1 \leq i \leq r$

$$\Rightarrow a_n = A_1 \alpha_1^n + A_2 \alpha_2^n + \cdots + A_r \alpha_r^n$$

Exemplo 8.13

$$a_n = 2 a_{n-1} \quad a_0 = 5$$

Solução:

1. Determinação de soluções individuais

$$a_n = \alpha^n \quad \alpha^n = 2 \alpha^{n-1} \quad \alpha_1 = 2$$

2. Determinação de solução geral

$$a_n = A_1 \alpha_1^n = A_1 2^n$$

$$a_0 = A_1 2^0 = 5 \rightarrow A_1 = 5$$

$$\Rightarrow a_n = 5 \times 2^n \quad n \geq 0$$

Exemplo 8.14

$$a_n = 5 a_{n-1} - 6 a_{n-2} \quad a_0 = 1 \quad a_1 = 4$$

Solução:

1. soluções individuais:

$$\alpha^n = 5 \alpha^{n-1} - 6 \alpha^{n-2} \quad \alpha^2 = 5 \alpha - 6 \quad \alpha_1 = 3 \quad \alpha_2 = 2$$

2. solução geral:

$$a_n = A_1 3^n + A_2 2^n$$

$$a_0 = 1 = A_1 + A_2$$

$$a_1 = 4 = 3 A_1 + 2 A_2 \rightarrow A_1 = 2 \quad A_2 = -1$$

$$\Rightarrow a_n = 2 \times 3^n - 2^n \quad n \geq 0$$

Verificação: $a_2 = 5 a_1 - 6 a_0 = 14 \quad a_2 = 2 \times 3^2 - 2^2 = 14$

Exemplo 8.15

Fibonacci: $a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \quad a_0 = 0 \quad a_1 = 1$

Solução:

$$1. \quad a_n = \alpha^n \quad \alpha^n = \alpha^{n-1} + \alpha^{n-2} \quad \alpha^2 = \alpha + 1$$

$$\alpha_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad \alpha_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

$$2. \quad a_n = A_1 \alpha_1^n + A_2 \alpha_2^n \quad a_n = A_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + A_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

$$a_0 = 0 = A_1 + A_2$$

$$a_1 = 1 = A_1 \frac{1+\sqrt{5}}{2} + A_2 \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

$$A_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \quad A_2 = -\frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\Rightarrow a_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \quad n \geq 0$$

Obs: a_n : número inteiro!

Equação característica: $\alpha^r - c_1 \alpha^{r-1} - c_2 \alpha^{r-2} - \dots - c_r = 0$

r raízes:

• raízes reais;

• raízes complexas ($a + b i$, $i = \sqrt{-1}$)

• raízes múltiplas: α_i de multiplicidade m

$\rightarrow m$ soluções da forma $\alpha_i^n, n\alpha_i^n, n^2\alpha_i^n, \dots, n^{m-1}\alpha_i^n$

Exemplo 8.16

$$a_n = 4 a_{n-1} - 5 a_{n-2} \quad a_0 = 6 \quad a_1 = 12$$

Solução:

1. soluções individuais:

$$\alpha^n = 4 \alpha^{n-1} - 5 \alpha^{n-2} \quad \alpha^2 = 4 \alpha - 5$$

$$\rightarrow \alpha_1 = 2 + i \quad \alpha_2 = 2 - i$$

2. solução geral:

$$a_n = A_1 (2 + i)^n + A_2 (2 - i)^n$$

$$a_0 = 6 = A_1 + A_2$$

$$a_1 = 12 = (2 + i) A_1 + (2 - i) A_2 \quad \rightarrow A_1 = A_2 = 3$$

$$\Rightarrow a_n = 3 (2 + i)^n + 3 (2 - i)^n \quad n \geq 0$$

Obs: a_n : número inteiro!

Exemplo 8.17

$$a_n = 6 a_{n-1} - 9 a_{n-2} \quad a_0 = 1 \quad a_1 = 6$$

Solução:

1. soluções individuais:

$$\alpha^n = 6 \alpha^{n-1} - 9 \alpha^{n-2} \quad \alpha^2 = 6 \alpha - 9 \quad \alpha_1 = \alpha_2 = 3$$

2. solução geral:

$$a_n = A_1 3^n + A_2 n 3^n$$

$$a_0 = 1 = A_1$$

$$a_1 = 6 = 3 A_1 + 3 A_2 \quad \rightarrow A_2 = 1$$

$$\Rightarrow a_n = 3^n + n 3^n \quad n \geq 0$$

Exemplo 8.18

$$a_n = 7 a_{n-1} - 16 a_{n-2} + 7 a_{n-3}$$

$$a_1 = 3 \quad a_2 = 11 \quad a_3 = 29$$

Solução:

1. equação característica: $\alpha^3 - 7\alpha^2 + 16\alpha - 12 = 0$
 raízes: $\alpha_1 = 2$, de multiplicidade 2, e $\alpha_2 = 3$

2. $a_n = A_1 2^n + A_2 n 2^n + A_3 3^n$

$$\begin{aligned} a_1 = 3 &= 2 A_1 + 2 A_2 + 3 A_3 & A_1 &= 1 \\ a_2 = 11 &= 4 A_1 + 8 A_2 + 9 A_3 & \Rightarrow A_2 &= 2 \\ a_3 = 29 &= 8 A_1 + 24 A_2 + 27 A_3 & A_3 &= -1 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow a_n = 2^n + n 2^{n+1} - 3^n \quad n \geq 1$$

Solução de rr linear não homogênea de coeficientes constantes

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_r a_{n-r} + f(n)$$

1. Determinação de solução da rr homogênea:

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_r a_{n-r}$$

solução: $a_n = g(n)$

2. Determinação de solução particular para a rr não homogênea:

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_r a_{n-r} + f(n)$$

solução particular: $a_n^* = p(n)$

Não existe um método geral para determinar $p(n)$

$\rightarrow p(n)$ depende de $f(n)$.

3. Determinação de solução geral para a rr não homogênea:

solução geral: $a_n = g(n) + p(n)$

Solução de $a_n = c a_{n-1} + f(n)$

a) caso particular: $c = 1$

$$\begin{aligned} a_n &= a_{n-1} + f(n) \\ &= a_{n-2} + f(n-1) + f(n) \\ &\vdots \\ &= a_0 + f(1) + f(2) + \cdots + f(n) \end{aligned}$$

$$a_n = a_0 + \sum_{k=1}^n f(k)$$

Solução de $a_n = c a_{n-1} + f(n)$

b) caso geral:

1. $a_n = c^n$ = solução de $(a_n = c a_{n-1})$

2. a_n^* = solução particular de $(a_n = c a_{n-1} + f(n))$

- $f(n)$ polinômio de grau $r \rightarrow a_n^*$ polinômio de grau r ou maior (r + multiplicidade de 1 na equação característica)
- $f(n)$ da forma $\alpha^n \rightarrow a_n^*$ da forma $B n^k \alpha^n$ (k : multiplicidade de α na equação característica)

3. solução geral para $a_n = c a_{n-1} + f(n)$:

$$a_n = A c^n + a_n^*$$

Exemplo 8.19

$$a_n = 2 a_{n-1} + 1 \quad a_1 = 1 \quad (\text{Torre de Hanoi - exemplo 8.10})$$

Solução:1. rr homogênea: $a_n = 2^n$ 2. rr não homogênea: $a_n^* = B$

$$a_n^* = B = 2 a_{n-1}^* + 1 = 2 B + 1 \rightarrow B = -1$$

3. solução geral:

$$a_n = A 2^n + a_n^* = A 2^n - 1$$

$$a_1 = 1 = A \cdot 2 - 1 \Rightarrow A = 1$$

$$\Rightarrow a_n = 2^n - 1 \quad n \geq 1$$

Exemplo 8.20

$$a_n = a_{n-1} + n \quad a_0 = 1 \quad (\text{Regiões do plano - exemplo 8.11})$$

Solução:1. rr homogênea: $a_n = 1^n$

2. rr não homogênea:

• $p(n)$ = polinômio de grau 1; $a_n^* = B_1 n + B_0$

$$a_n^* = a_{n-1}^* + n = B_1 (n-1) + B_0 + n = B_1 n + B_0$$

$$\rightarrow B_1 = n \text{ (impossível; } B_1 \text{ é constante)}$$

• $p(n)$ = polinômio de grau 2; $a_n^* = B_2 n^2 + B_1 n + B_0$

$$a_n^* = B_2 (n-1)^2 + B_1 (n-1) + B_0 + n = B_2 n^2 + B_1 n + B_0$$

$$2 B_2 n + (B_1 - B_2) = n$$

$$\rightarrow B_2 = 1/2 \quad B_1 = 1/2 \quad B_0: \text{ qualquer valor } (B_0 = 0)$$

$$\Rightarrow a_n^* = \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2}$$

Exemplo 8.20 (cont.)

$$a_n = a_{n-1} + n \quad a_0 = 1$$

Solução:

3. solução geral:

$$a_n = A 1^n + a_n^* = A 1^n + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2}$$

$$a_0 = 1 = A$$

$$\Rightarrow a_n = 1 + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2} = 1 + \frac{n(n+1)}{2} \quad n \geq 0$$

Exemplo 8.21

$$a_n = 4 a_{n-1} - 4 a_{n-2} + 2^n \quad a_0 = 3 \quad a_1 = 1$$

Solução:1. rr homogênea: $a_n = 4 a_{n-1} - 4 a_{n-2}$

$$\text{solução: } a_n = A_1 2^n + A_2 n 2^n$$

2. rr não homogênea: $a_n = 4 a_{n-1} - 4 a_{n-2} + 2^n$

$$a_n^* = B n^2 2^n$$

$$B n^2 2^n = 4 B (n-1)^2 2^{n-1} - 4 B (n-2)^2 2^{n-2} + 2^n$$

$$\rightarrow B = 1/2 \Rightarrow a_n^* = \frac{1}{2} n^2 2^n$$

3. solução geral:

$$a_n = A_1 2^n + A_2 n 2^n + n^2 2^{n-1}$$

$$a_0 = 3 \quad a_1 = 1 \rightarrow A_1 = 3 \quad A_2 = -3$$

$$\Rightarrow a_n = 3 \cdot 2^n - 3 n 2^n + n^2 2^{n-1} \quad n \geq 0$$

Exemplo 8.22

$$a_n = 3 a_{n-1} - 4 n + 3 \cdot 2^n \quad a_1 = 8$$

Solução:1. 1a. rr não homogênea: $a_n = 3 a_{n-1} - 4 n$

$$a_n^* = B_1 n + B_0 \quad B_1 n + B_0 = 3 (B_1 (n-1) + B_0) - 4 n$$

$$\rightarrow B_1 = 2 \quad B_0 = 3 \quad \Rightarrow \quad a_n^* = 2 n + 3$$

2. 2a. rr não homogênea: $a_n = 3 a_{n-1} + 3 \cdot 2^n$

$$a_n^{**} = B 2^n \quad B 2^n = 3 (B 2^{(n-1)}) + 3 \cdot 2^n$$

$$\rightarrow B = -6 \quad \Rightarrow \quad a_n^{**} = -6 \cdot 2^n$$

3. solução geral:

$$a_n = A 3^n + a_n^* + a_n^{**} = A 3^n + 2 n + 3 - 6 \cdot 2^n$$

$$a_1 = 8 \quad \rightarrow \quad A = 5$$

$$\Rightarrow a_n = 5 \cdot 3^n + 2 n + 3 - 6 \cdot 2^n \quad n \geq 1$$

Solução de rr do tipo divisão e conquista

$$a_n = c a_{n/d} + f(n) \quad c, d \text{ constantes}$$

Forma da solução:

c	$f(n)$	a_n
$c = 1$	d	$d \lceil \log_2 n \rceil + A$
$c = 2$	d	$An - d$
$c > 2$	dn	$An^{\log_2 c} + \left(\frac{2d}{2-c}\right)n$
$c = 2$	dn	$dn(\log_2 n + A)$

Exemplo 8.23**Pesquisa binária:** (exemplo 8.5)número de comparações para determinar se elemento x está em lista ordenada de tamanho n ($n = 2^k$).

$$a_1 = 1 \quad a_n = a_{n/2} + 1 \quad n \geq 2$$

Solução 1 - substituições sucessivas:

$$a_{2k} = a_{2k-1} + 1$$

$$= (a_{2k-2} + 1) + 1 = a_{2k-2} + 2$$

$$= (a_{2k-3} + 1) + 2 = a_{2k-3} + 3$$

$$\vdots$$

$$= (a_{2k-k} + 1) + (k-1) = a_{2k-k} + k = a_1 + k$$

$$a_{2k} = 1 + k$$

$$n = 2^k \rightarrow k = \log_2(n) \Rightarrow a_n = \log_2(n) + 1$$

Exemplo 8.23 (cont.)**Pesquisa binária:**número de comparações para determinar se elemento x está em lista ordenada de tamanho n ($n = 2^k$).

$$a_1 = 1 \quad a_n = a_{n/2} + 1 \quad n \geq 2$$

Solução 2 - forma da solução: $a_n = \log_2(n) + A$

$$a_1 = 1 = \log_2(1) + A \rightarrow A = 1$$

$$\Rightarrow a_n = \log_2(n) + 1$$

Outras técnicas de solução de relações de recorrência

- rr linear de primeira ordem: $a_n = p(n)a_{n-1} + f(n)$
- convolução: $a_n = a_0a_r + a_1a_{r-1} + \cdots + a_ra_0$
- rr de mais de uma variável

→ uso de função geradora

Solução de rr linear de primeira ordem

$$a_0 = c \quad a_n = p(n)a_{n-1} + f(n) \quad p(n) \text{ qualquer}$$

Solução da forma u_nv_n

1. u_n : solução para a parte homogênea $a_n = p(n)a_{n-1}$

$$u_0 = 1$$

$$u_1 = p(1) \times 1$$

⋮

$$u_n = p(n)p(n-1) \cdots p(1)$$

2. u_nv_n : solução para $a_n = p(n)a_{n-1} + f(n)$

$$u_nv_n = p(n)u_{n-1}v_{n-1} + f(n) \quad u_n = p(n)u_{n-1}$$

$$\rightarrow u_nv_n = u_nv_{n-1} + f(n) \quad v_n = v_{n-1} + \frac{f(n)}{u(n)}$$

$$u_0 = 1 \rightarrow v_0 = a_0$$

Solução de rr linear de primeira ordem:

$$a_0 = c \quad a_n = p(n)a_{n-1} + f(n) \quad p(n) \text{ qualquer}$$

Síntese: solução da forma u_nv_n

1. u_n : solução para a parte homogênea $a_n = p(n)a_{n-1}$

$$u_n = p(n)p(n-1) \cdots p(1)$$

2. u_nv_n : solução para $a_n = p(n)a_{n-1} + f(n)$

$$v_n = v_{n-1} + \frac{f(n)}{u(n)} \quad v_0 = a_0$$

Exemplo 8.24

$$a_n = \frac{n}{n-1}a_{n-1} + n^3 \quad a_1 = 1$$

$$a_n = p(n)a_{n-1} + f(n) \quad p(n) = \frac{n}{n-1} \quad f(n) = n^3$$

Solução:

$$1. \quad u_n = p(n)p(n-1) \cdots p(2)a_1 \quad u_n = \frac{n}{n-1} \frac{n-1}{n-2} \cdots \frac{2}{1} 1 = n$$

$$2. \quad v_n = v_{n-1} + \frac{f(n)}{u(n)} \quad v_1 = a_1 \quad v_n = v_{n-1} + n^3/n \quad v_1 = 1$$

$$\rightarrow v_n = \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

$$a_n = u_nv_n = \frac{1}{6}n^2(n+1)(2n+1) \quad \text{para } n \geq 1$$

Exemplo 8.25**Permutações caóticas: (exemplo 8.9)**

$$D_n = nD_{n-1} + (-1)^n \quad D_0 = 1$$

$$a_n = p(n)a_{n-1} + f(n) \quad p(n) = n \quad f(n) = (-1)^n$$

Solução:

$$1. u_n = p(n)p(n-1) \cdots p(1)a_0 \quad u_n = n!$$

$$2. v_n = v_{n-1} + \frac{f(n)}{u(n)} \quad v_0 = a_0 \quad v_n = v_{n-1} + (-1)^n/n! \quad v_0 = 1$$

$$\rightarrow v_n = \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{1}{n!}$$

$$D_n = u_n v_n = n! \left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{1}{n!} \right) \quad \text{para } n \geq 0$$

EXEMPLOS E APLICAÇÕES

- avaliação de somatório
- determinação de número de operações de algoritmo recursivo

Somatórios podem ser descritos como relação de recorrência.**Exemplos:**

$$\bullet S = 1 + 2 + \cdots + n \quad S = a_n$$

$$a_1 = 1 \quad a_n = a_{n-1} + n \quad \text{para } n \geq 2$$

$$\bullet S = 2^0 + 2^1 + 2^2 + \cdots + 2^n \quad S = a_n$$

$$a_0 = 1 \quad a_n = a_{n-1} + 2^n \quad \text{para } n \geq 1$$

Exemplo 8.26

$$S = \sum_{k=1}^n k^2 = 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2$$

$$\text{Solução: } S = a_n = a_{n-1} + n^2 \quad a_1 = 1$$

$$1. \text{ solução particular: } a_n^* = B_3 n^3 + B_2 n^2 + B_1 n + B_0$$

$$a_n^* = B_3 (n-1)^3 + B_2 (n-1)^2 + B_1 (n-1) + B_0 + n^2$$

$$\rightarrow B_3 = 1/3 \quad B_2 = 1/2 \quad B_1 = 1/6 \quad B_0 = 0$$

$$\Rightarrow a_n^* = \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n$$

2. solução geral:

$$a_n = A 1^n + \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n$$

$$a_1 = 1 \rightarrow A = 0$$

$$\Rightarrow a_n = \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6} = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) \quad n \geq 1$$

Exemplo 8.27

Número de comparações para determinar maior e menor elemento de lista de n elementos (supor $n = 2^k$).

Solução 1:

```
procedimento limites(lista,maior,menor);
se a lista tem apenas 1 elemento então
    maior <-- elemento; menor <-- elemento;
    retorna
senão
    lista1 = 1a. metade da lista; lista2 = 2a. metade da lista;
    limites(lista1,maior1,menor1); limites(lista2,maior2,menor2);
    maior <-- max(maior1,maior2); menor <-- min(menor1,menor2);
    retorna
fimse
```

Exemplo 8.27 (cont.)

Número de comparações para determinar maior e menor elemento de lista de n elementos (supor $n = 2^k$).

Solução 1 (cont.):

$$a_1 = 0 \quad a_n = 2a_{n/2} + 2 \quad \text{para } n \geq 2$$

$$a_n = A_1 n + A_2 = 2(A_1 \frac{n}{2} + A_2) + 2 \rightarrow A_2 = -2$$

$$a_1 = 0 = A_1 + A_2 \rightarrow A_1 = 2$$

$$\Rightarrow a_n = 2n - 2 \quad n \geq 1$$

Exemplo 8.27 (cont.)

Número de comparações para determinar maior e menor elemento de lista de n elementos (supor $n = 2^k$).

Solução 2 (mais eficiente):

```
procedimento limites(lista,maior,menor);
se a lista tem apenas 2 elementos então
    compara os 2 elementos;
    maior <-- maior elemento; menor <-- menor elemento;
    retorna
senão
    lista1 = 1a. metade da lista; lista2 = 2a. metade da lista;
    limites(lista1,maior1,menor1); limites(lista2,maior2,menor2);
    maior <-- max(maior1,maior2); menor <-- min(menor1,menor2);
    retorna
fimse
```

Exemplo 8.27 (cont.)

Número de comparações para determinar maior e menor elemento de lista de n elementos (supor $n = 2^k$).

Solução 2 (mais eficiente) (cont.):

$$a_2 = 1 \quad a_n = 2a_{n/2} + 2 \quad \text{para } n \geq 4$$

$$a_n = A_1 n + A_2 = 2(A_1 \frac{n}{2} + A_2) + 2 \rightarrow A_2 = -2$$

$$a_2 = 1 = 2A_1 + A_2 \rightarrow A_1 = 3/2$$

$$\Rightarrow a_n = \frac{3}{2}n - 2 \quad n \geq 2$$

FIM