

4. COMBINATÓRIA BÁSICA

- Introdução
- Regra da soma e do produto
- Modelo de amostragem
- Modelo de distribuição
- Modelo de equação
- Identidades combinatórias
- Coeficientes binomiais

INTRODUÇÃO

Combinatória: ramo da matemática que trata de arranjos de objetos (configurações satisfazendo propriedades específicas).

Problemas relacionados a arranjos de objetos:

- existência
- construção
- enumeração
- contagem $\rightarrow$ **arte de contar sem contar**
- otimização
- verificação de propriedades

Exemplos de problemas combinatórios:

- Quantas possibilidades existem para escolha de uma senha válida (password) em certo sistema de computação?
- Qual é a probabilidade de se acertar a sena na megasena? E a quina? E a quadra?
- É possível dispor 4 casais em volta de uma mesa circular tal que não haja 2 homens, 2 mulheres ou um casal lado a lado? De quantas maneiras? Listar configurações.
- Quantas comparações um certo algoritmo de ordenação pode fazer, no máximo?
- Qual é o menor percurso entre duas cidades utilizando um certo sistema de transporte?

Exemplo 4.1

Soma 5 no lançamento de dois dados distintos.

Casos possíveis:

(1,1) (1,2) (1,3) (1,4) (1,5) (1,6)
(2,1) (2,2) (2,3) (2,4) (2,5) (2,6)
...
(6,1) (6,2) (6,3) (6,4) (6,5) (6,6)

Casos de interesse:

(1,4) (2,3) (3,2) (4,1)

Número de casos com soma 5: 4 $\rightarrow$ queremos contar sem listar!

REGRA DA SOMA E DO PRODUTO

Idéia: Dividir problema de contagem em partes independentes.

Regra da soma:

A e B eventos disjuntos;

A: p casos possíveis; B: q casos possíveis;

$\Rightarrow$ evento A ou B: $p + q$ casos possíveis.

Regra do produto:

Evento C decomposto em etapas sucessivas A e B;

A: p casos possíveis; B: q casos possíveis, independente de A.

$\Rightarrow$ evento C: $p \times q$ casos possíveis.

Exemplo 4.2

Aluno X tem as seguintes opções de ida e volta da escola:

- a) ida: 2 ônibus ou 3 caronas até a escola;**
- b) volta: 3 caronas até o centro e daí 2 ônibus até a casa.**

Número de opções:

- a) ida: $N_1 = 2 + 3 = 5$ (regra da soma)**
- b) volta: $N_2 = 3 \times 2 = 6$ (regra do produto)**

Exemplo 4.3

Número de maneiras de obter Q ou K de um baralho.

Solução:

evento A: um Q $\rightarrow$ 4 maneiras

evento B: um K $\rightarrow$ 4 maneiras

$\Rightarrow$ A ou B: $4 + 4 = 8$ maneiras.

Exemplo 4.4

Número de maneiras de obter Q ou carta vermelha de um baralho.

Solução 1:

evento A: um Q $\rightarrow$ 4 maneiras

evento B: carta vermelha $\rightarrow$ 26 maneiras

A e B não disjuntos; número de elementos em A e B = 2

$\Rightarrow$ Q ou carta vermelha: $4 + 26 - 2 = 28$ maneiras.

compensação $\rightarrow$ princípio de inclusão e exclusão

Solução 2:

evento A: um Q preto $\rightarrow$ 2 maneiras

evento B: carta vermelha $\rightarrow$ 26 maneiras

A e B disjuntos

$\Rightarrow$ evento A ou B: $2 + 26 = 28$ maneiras.

diferentes maneiras de resolver o mesmo problema

Exemplo 4.5

Lançamento de dois dados distintos.

1) resultados possíveis:

evento A: primeiro dado $\rightarrow$ 6 casos

evento B: segundo dado $\rightarrow$ 6 casos

$\Rightarrow$ eventos A e B: $6 \times 6 = 36$ casos.

2) resultados sem repetição:

evento A: primeiro dado $\rightarrow$ 6 casos

evento B: segundo dado $\neq$ primeiro dado $\rightarrow$ 5 casos

$\Rightarrow$ eventos A e B: $6 \times 5 = 30$ casos.

(eliminando repetições: $36 - 6 = 30$ casos)

Exemplo 4.6

Número de sequências binárias de n dígitos.

Solução:

dígito i : 2 possibilidades

n dígitos: $N = 2 \times 2 \times \dots \times 2 = 2^n$

Exemplo 4.7

Número de inteiros de 3 dígitos divisíveis por 5.

Solução 1:

números divisíveis por 5: $d_1d_2d_3$

$1 \leq d_1 \leq 9, 0 \leq d_2 \leq 9, d_3 = 0 \text{ ou } 5$

total de números: $N = 9 \times 10 \times 2 = 180$

Solução 2:

números divisíveis por 5: $\text{resto}(n, 5) = 0 \rightarrow \text{contar quocientes}$

$100 = 5 \times 20; 105 = 5 \times 21; \dots 995 = 5 \times 199.$

total de números: $N = (199 - 20) + 1 = 180$

MODELO DE AMOSTRAGEM

Amostras de r objetos extraídas de um conjunto de n objetos distintos

Aspectos a serem considerados:

- **Ordem:** sim/não
- **Repetição:** sim/não

- permutação (ou arranjo): ordem é importante.
- seleção (ou combinação): ordem não importa.

amostras de 2 objetos de $\{x_1, x_2, x_3\}$ ($n = 3$, $r = 2$)

	com repetição	sem repetição
arranjo (ordem importante)	x_1x_1 x_1x_2 x_1x_3 x_2x_1 x_2x_2 x_2x_3 x_3x_1 x_3x_2 x_3x_3 seqüência	x_1x_2 x_1x_3 x_2x_1 x_2x_3 x_3x_1 x_3x_2 permutação
seleção (sem ordem)	$\{x_1, x_1\}$ $\{x_1, x_2\}$ $\{x_1, x_3\}$ $\{x_2, x_2\}$ $\{x_2, x_3\}$ $\{x_3, x_3\}$ multiconjunto	$\{x_1, x_2\}$ $\{x_1, x_3\}$ $\{x_2, x_3\}$ combinação

1) Número de **sequências** de tamanho r :

$$\text{número de sequências} = n \times n \times \dots \times n = n^r$$

2) Número de **permutações**:

$$P(n, n) = n(n - 1) \dots 2.1 = n!$$

$$P(n, r) = n(n - 1) \dots (n - r + 1) = \frac{n!}{(n-r)!} \quad r \leq n$$

Outra demonstração:

- processo para permutar n objetos:
permutar r primeiros e depois permutar $(n-r)$ restantes.
- no. permutações n objetos =
no. permutações r primeiros $\times$ no. permutações $(n-r)$ restantes
- $P(n, n) = P(n, r) \times P(n - r, n - r)$
 $\therefore P(n, r) = \frac{P(n, n)}{P(n-r, n-r)} = \frac{n!}{(n-r)!}$

3) Número de **combinações** de tamanho r :

$$\binom{n}{r} = C(n, r) = \frac{n!}{r!(n-r)!} \quad r \leq n$$

Demonstração:

- processo para permutar r objetos dentre n objetos:
selecionar r objetos e depois permutá-los.
- no. permutações r objetos =
no. seleções r objetos $\times$ no. permutações dos r selecionados
- $P(n, r) = C(n, r) \times P(r, r)$
 $\therefore C(n, r) = \frac{P(n, r)}{P(r, r)} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$

4) Número de **multiconjuntos** (seleções com repetição) de tamanho r :

$$\left(\binom{n}{r}\right) = \binom{n-1+r}{r} = C(n-1+r, r) = \frac{(n-1+r)!}{r!(n-1)!}$$

Demonstração:

- exemplo de seleção para $n = 3$, $r = 4$

objetos: a,b,c seleção: accc (1a, 0b, 3c)

a	b	c		
x		xxx	x//xxx	4 x, 2 /

- no. seleções = no. posições para / (2) = no. posições para x (4)
 $= \binom{2+4}{2} = \binom{2+4}{4} = 15$

- no. seleções = no. posições para / $(n-1)$ = no. posições para x (r)
 $\therefore \left(\binom{n}{r}\right) = \binom{n-1+r}{n-1} = \binom{n-1+r}{r} = \frac{(n-1+r)!}{r!(n-1)!}$

amostras de 2 objetos de $\{x_1, x_2, x_3\}$ ($n = 3$, $r = 2$)

	com repetição	sem repetição
arranjo (ordem importante)	x_1x_1 x_1x_2 x_1x_3 x_2x_1 x_2x_2 x_2x_3 x_3x_1 x_3x_2 x_3x_3 $3^2 = 9$	x_1x_2 x_1x_3 x_2x_1 x_2x_3 x_3x_1 x_3x_2 $P(3, 2) = 6$
seleção (sem ordem)	$\{x_1, x_1\}$ $\{x_1, x_2\}$ $\{x_1, x_3\}$ $\{x_2, x_2\}$ $\{x_2, x_3\}$ $\{x_3, x_3\}$ $\binom{3}{2} = \binom{3-1+2}{2} = 6$	$\{x_1, x_2\}$ $\{x_1, x_3\}$ $\{x_2, x_3\}$ $C(3, 2) = 3$

Amostras de r objetos extraídas de conjunto de n objetos distintos

	com repetição	sem repetição
arranjo (com ordem)	n^r	$P(n, r) = \frac{n!}{(n-r)!}$
seleção (sem ordem)	$\left(\binom{n}{r}\right) = \binom{n-1+r}{r}$	$C(n, r) = \binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$

- Número de **sequências** de tamanho r :

$$\text{número de sequências} = n^r$$

- Número de **permutações**:

$$P(n, n) = n!$$

$$P(n, r) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

- Número de **combinações** de tamanho r :

$$\binom{n}{r} = C(n, r) = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

- Número de **multiconjuntos** de tamanho r :

$$\left(\binom{n}{r} \right) = \binom{n-1+r}{r} = \binom{n-1+r}{n-1} = \frac{(n-1+r)!}{r!(n-1)!}$$

Exemplos

- Número de resultados possíveis no lançamento de 3 dados:

$$N_1 = 6^3 = 216$$

- Número de arranjos das cartas de um baralho:

$$N_2 = P(52, 52) = 52! \approx 7,96 \times 10^{67}$$

- Número de mãos de 5 cartas, no baralho:

$$N_3 = \binom{52}{5} = 2.598.960$$

- Número de dominós:

$$N_4 = \left(\binom{7}{2} \right) = \binom{7-1+2}{2} = \binom{8}{2} = \binom{8}{6} = 28$$

Observações:

- $\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$
- $n! \approx \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$ (*Stirling*)

Exemplo 4.8

Número de senhas de 4 dígitos decimais.

- sem repetição: $N_1 = P(10, 4) = \frac{10!}{6!} = 5040$
- com repetição: $N_2 = 10^4 = 10.000$

Exemplo 4.9

Pôquer: probabilidade de ocorrer um *flush* (5 cartas do mesmo naipe).

$$p(\textit{flush}) = \frac{\text{no. flushes}}{\text{no. mãos de 5 cartas}} = \frac{4 \times C(13,5)}{C(52,5)} = 0,00198$$

Permutação com objetos idênticos

Exemplo: número de permutações com as letras b, a, n, a, n, a .

Solução 1:

3 posições para a : $N_a = C(6, 3) = 20$

2 posições para n : $N_n = C(3, 2) = 3$

1 posição para b : $N_b = C(1, 1) = 1$

no. permutações = $N_a \times N_n \times N_b = 20 \times 3 \times 1 = 60$

Permutação com objetos idênticos

n objetos, r_k do tipo k

$$r_1 + r_2 + \dots + r_m = n$$

$$\begin{aligned} P(n; r_1, r_2, \dots, r_m) &= \binom{n}{r_1} \binom{n - r_1}{r_2} \dots \binom{n - r_1 - r_2 - \dots - r_{m-1}}{r_m} \\ &= \frac{n!}{r_1! r_2! \dots r_m!} \end{aligned}$$

Permutação com objetos idênticos

$$P(n; r_1, r_2, \dots, r_m) = \frac{n!}{r_1! r_2! \dots r_m!} \quad r_1 + r_2 + \dots + r_m = n$$

Outra demonstração:

- processo para permutar n objetos distintos:
 - 1) considerar grupos de objetos idênticos: permutar grupos;
 - 2) considerar objetos distintos nos grupos: permutar objetos nos grupos.
- total de permutações =
no. permutações dos grupos $\times$ no. permutações em cada grupo
 $n! = P(n; r_1, r_2, \dots, r_m) r_1! r_2! \dots r_m!$
 $\therefore P(n; r_1, r_2, \dots, r_m) = \frac{n!}{r_1! r_2! \dots r_m!}$

Permutação com objetos idênticos

Exemplo: número de permutações com as letras b, a, n, a, n, a .

Solução 2:

$$\text{no. permutações} = P(6; 3, 2, 1) = \frac{6!}{3!2!1!} = 60$$