4. COMBINATÓRIA BÁSICA

- Introdução
- Regra da soma e do produto
- Modelo de amostragem
- Modelo de distribuição
- Modelo de equação
- Identidades combinatórias
- Coeficientes binomiais

INTRODUÇÃO

Combinatória: ramo da matemática que trata de arranjos de objetos (configurações satisfazendo propriedades específicas).

Problemas relacionados a arranjos de objetos:

- existência
- construção
- enumeração
- contagem $\longrightarrow$ arte de contar sem contar
- otimização
- verificação de propriedades

Exemplos de problemas combinatórios:

- Quantas possibilidades existem para escolha de uma senha válida (password) em certo sistema de computação?
- Qual é a probabilidade de se acertar a sena na megasena? E a quina? E a quadra?
- É possível dispor 4 casais em volta de uma mesa circular tal que não haja 2 homens, 2 mulheres ou um casal lado a lado? De quantas maneiras? Listar configurações.
- Quantas comparações um certo algoritmo de ordenação pode fazer, no máximo?
- Qual é o menor percurso entre duas cidades utilizando um certo sistema de transporte?

Exemplo 4.1

Soma 5 no lançamento de dois dados <u>distintos</u>.

Casos possíveis:

```
(1,1) (1,2) (1,3) (1,4) (1,5) (1,6)
(2,1) (2,2) (2,3) (2,4) (2,5) (2,6)
 ...
(6,1) (6,2) (6,3) (6,4) (6,5) (6,6)
```

Casos de interesse:

```
(1,4) (2,3) (3,2) (4,1)
```

Número de casos com soma 5: 4 $\longrightarrow$ queremos contar sem listar!

REGRA DA SOMA E DO PRODUTO

Idéia: Dividir problema de contagem em partes independentes.

Regra da soma:

A e B eventos disjuntos;
A: p casos possíveis; B: q casos possíveis;
$\Rightarrow$ evento A ou B: $p + q$ casos possíveis.

Regra do produto:

Evento C decomposto em etapas sucessivas A e B;
A: p casos possíveis; B: q casos possíveis, independente de A.
$\Rightarrow$ evento C: $p \times q$ casos possíveis.

Exemplo 4.2

Aluno X tem as seguintes opções de ida e volta da escola:

a) ida: 2 ônibus ou 3 caronas até a escola;
b) volta: 3 caronas até o centro e daí 2 ônibus até a casa.

Número de opções:
a) ida: $N_1 = 2 + 3 = 5$ (regra da soma)
b) volta: $N_2 = 3 \times 2 = 6$ (regra do produto)

Exemplo 4.3

Número de maneiras de obter Q ou K de um baralho.

Solução:
evento A: um Q $\longrightarrow$ 4 maneiras
evento B: um K $\longrightarrow$ 4 maneiras
$\Rightarrow$ A ou B: $4 + 4 = 8$ maneiras.

Exemplo 4.4

Número de maneiras de obter Q ou carta vermelha de um baralho.

Solução 1:
evento A: um Q $\longrightarrow$ 4 maneiras
evento B: carta vermelha $\longrightarrow$ 26 maneiras
A e B não disjuntos; número de elementos em A e B = 2
$\Rightarrow$ Q ou carta vermelha: $4 + 26 - 2 = 28$ maneiras.
compensação $\longrightarrow$ princípio de inclusão e exclusão

Solução 2:
evento A: um Q preto $\longrightarrow$ 2 maneiras
evento B: carta vermelha $\longrightarrow$ 26 maneiras
A e B disjuntos
$\Rightarrow$ evento A ou B: $2 + 26 = 28$ maneiras.
diferentes maneiras de resolver o mesmo problema

Exemplo 4.5

Lançamento de dois dados distintos.

1) resultados possíveis:

evento A: primeiro dado $\rightarrow$ 6 casos
evento B: segundo dado $\rightarrow$ 6 casos
$\Rightarrow$ **eventos A e B: $6 \times 6 = 36$ casos.**

2) resultados sem repetição:

evento A: primeiro dado $\rightarrow$ 6 casos
evento B: segundo dado $\neq$ primeiro dado $\rightarrow$ 5 casos
$\Rightarrow$ **eventos A e B: $6 \times 5 = 30$ casos.**
(eliminando repetições: $36 - 6 = 30$ casos)

Exemplo 4.6

Número de sequências binárias de n dígitos.

Solução:

dígito i: 2 possibilidades
n dígitos: $N = 2 \times 2 \times \ldots \times 2 = 2^n$

Exemplo 4.7

Número de inteiros de 3 dígitos divisíveis por 5.

Solução 1:

números divisíveis por 5: $d_1 d_2 d_3$
$1 \leq d_1 \leq 9,\ 0 \leq d_2 \leq 9,\ d_3 = 0$ **ou** 5
total de números: $N = 9 \times 10 \times 2 = 180$

Solução 2:

números divisíveis por 5: $resto(n, 5) = 0 \rightarrow$ contar quocientes
$100 = 5 \times 20; 105 = 5 \times 21; \ldots 995 = 5 \times 199.$
total de números: $N = (199 - 20) + 1 = 180$

MODELO DE AMOSTRAGEM

Amostras de r objetos extraídas de um conjunto de n objetos <u>distintos</u>

Aspectos a serem considerados:

- **Ordem: sim/não**
- **Repetição: sim/não**

- **permutação (ou arranjo): ordem é importante.**
- **seleção (ou combinação): ordem não importa.**

amostras de 2 objetos de $\{x_1, x_2, x_3\}$ $(n = 3, \quad r = 2)$

	com repetição		sem repetição	
arranjo (ordem importante)	x_1x_1 x_1x_2 x_1x_3 x_2x_1 x_2x_2 x_2x_3 x_3x_1 x_3x_2 x_3x_3	**seqüência**	x_1x_2 x_1x_3 x_2x_1 x_2x_3 x_3x_1 x_3x_2	**permutação**
seleção (sem ordem)	$\{x_1, x_1\}$ $\{x_1, x_2\}$ $\{x_1, x_3\}$ $\{x_2, x_2\}$ $\{x_2, x_3\}$ $\{x_3, x_3\}$	**multiconjunto**	$\{x_1, x_2\}$ $\{x_1, x_3\}$ $\{x_2, x_3\}$	**combinação**

1) Número de sequências de tamanho r:

número de sequências $= n \times n \times \ldots \times n = n^r$

2) Número de permutações:

$$P(n, n) = n(n-1)\ldots 2.1 = n!$$
$$P(n, r) = n(n-1)\ldots(n-r+1) = \frac{n!}{(n-r)!} \qquad r \leq n$$

Outra demonstração:

- **processo para permutar n objetos:**
  permutar r primeiros e depois permutar $(n\text{-}r)$ restantes.
- **no. permutações n objetos =**
  no. permutações r primeiros $\times$ no. permutações $(n\text{-}r)$ restantes
- $P(n, n) = P(n, r) \times P(n-r, n-r)$
  $\therefore P(n, r) = \frac{P(n,n)}{P(n-r,n-r)} = \frac{n!}{(n-r)!}$

3) Número de combinações de tamanho r:

$$\binom{n}{r} = C(n, r) = \frac{n!}{r!(n-r)!} \qquad r \leq n$$

Demonstração:

- **processo para permutar r objetos dentre n objetos:**
  selecionar r objetos e depois permutá-los.
- **no. permutações r objetos =**
  no. seleções r objetos $\times$ no. permutações dos r selecionados
- $P(n, r) = C(n, r) \times P(r, r)$
  $\therefore C(n, r) = \frac{P(n,r)}{P(r,r)} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$

4) Número de multiconjuntos (seleções com repetição) de tamanho r:

$$\left(\!\binom{n}{r}\!\right) = \binom{n-1+r}{r} = C(n-1+r, r) = \frac{(n-1+r)!}{r!(n-1)!}$$

Demonstração:

- exemplo de seleção para $n = 3,\ r = 4$
  objetos: a,b,c   seleção: accc   (1a, 0b, 3c)

a	b	c
x		xxx

x//xxx   4 x, 2 /

- no. seleções = no. posições para / (2) = no. posições para x (4)
  $= \binom{2+4}{2} = \binom{2+4}{4} = 15$
- no. seleções = no. posições para / *(n-1)* = no. posições para x (r)
  $\therefore \left(\!\binom{n}{r}\!\right) = \binom{n-1+r}{n-1} = \binom{n-1+r}{r} = \frac{(n-1+r)!}{r!(n-1)!}$

amostras de 2 objetos de $\{x_1, x_2, x_3\}$ $(n = 3, \quad r = 2)$

	com repetição		sem repetição	
arranjo (ordem importante)	x_1x_1, x_1x_2, x_1x_3, x_2x_1, x_2x_2, x_2x_3, x_3x_1, x_3x_2, x_3x_3	$3^2 = 9$	x_1x_2, x_1x_3, x_2x_1, x_2x_3, x_3x_1, x_3x_2	$P(3,2) = 6$
seleção (sem ordem)	$\{x_1,x_1\}$, $\{x_1,x_2\}$, $\{x_1,x_3\}$, $\{x_2,x_2\}$, $\{x_2,x_3\}$, $\{x_3,x_3\}$	$\left(\!\binom{3}{2}\!\right) = \binom{3-1+2}{2} = 6$	$\{x_1,x_2\}$, $\{x_1,x_3\}$, $\{x_2,x_3\}$	$C(3,2) = 3$

Amostras de r objetos extraídas de conjunto de n objetos distintos

	com repetição	sem repetição
arranjo (com ordem)	n^r	$P(n,r) = \frac{n!}{(n-r)!}$
seleção (sem ordem)	$\left(\!\binom{n}{r}\!\right) = \binom{n-1+r}{r}$	$C(n,r) = \binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$

- Número de sequências de tamanho r:
  número de sequências $= n^r$
- Número de permutações:
  $P(n,n) = n!$
  $P(n,r) = \frac{n!}{(n-r)!}$
- Número de combinações de tamanho r:
  $\binom{n}{r} = C(n,r) = \frac{n!}{r!(n-r)!}$
- Número de multiconjuntos de tamanho r:
  $\left(\!\binom{n}{r}\!\right) = \binom{n-1+r}{r} = \binom{n-1+r}{n-1} = \frac{(n-1+r)!}{r!(n-1)!}$

Exemplos

- **Número de resultados possíveis no lançamento de 3 dados:**
  $N_1 = 6^3 = 216$
- **Número de arranjos das cartas de um baralho:**
  $N_2 = P(52, 52) = 52! \approx 7,96 \times 10^{67}$
- **Número de mãos de 5 cartas, no baralho:**
  $N_3 = \binom{52}{5} = 2.598.960$
- **Número de dominós:**
  $N_4 = \left(\binom{7}{2}\right) = \binom{7-1+2}{2} = \binom{8}{2} = \binom{8}{6} = 28$

Observações:

- $\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$
- $n! \approx \sqrt{2\pi n}\,(\frac{n}{e})^n \quad (Stirling)$

Exemplo 4.8

Número de senhas de 4 dígitos decimais.

- **sem repetição:** $N_1 = P(10, 4) = \frac{10!}{6!} = 5040$
- **com repetição:** $N_2 = 10^4 = 10.000$

Exemplo 4.9

Pôquer: probabilidade de ocorrer um *flush* (5 cartas do mesmo naipe).

$$p(flush) = \frac{\text{no. } \textit{flushes}}{\text{no. mãos de 5 cartas}} = \frac{4 \times C(13,5)}{C(52,5)} = 0,00198$$

Permutação com objetos idênticos

Exemplo: número de permutações com as letras b, a, n, a, n, a.

Solução 1:

3 posições para a: $N_a = C(6, 3) = 20$
2 posições para n: $N_n = C(3, 2) = 3$
1 posição para b: $N_b = C(1, 1) = 1$
no. permutações = $N_a \times N_n \times N_b = 20 \times 3 \times 1 = 60$

Permutação com objetos idênticos

n objetos, r_k do tipo k $\qquad r_1 + r_2 + \ldots + r_m = n$

$$\begin{aligned} P(n; r_1, r_2, \ldots, r_m) &= \binom{n}{r_1}\binom{n-r_1}{r_2}\cdots\binom{n-r_1-r_2-\ldots-r_{m-1}}{r_m} \\ &= \frac{n!}{r_1!r_2!\ldots r_m!} \end{aligned}$$

Permutação com objetos idênticos

$P(n; r_1, r_2, \ldots, r_m) = \frac{n!}{r_1!r_2!\ldots r_m!} \qquad r_1 + r_2 + \ldots + r_m = n$

Outra demonstração:

- processo para permutar n objetos distintos:
  1) considerar grupos de objetos idênticos: permutar grupos;
  2) considerar objetos distintos nos grupos: permutar objetos nos grupos.
- total de permutações =
  no. permutações dos grupos $\times$ no. permutações em cada grupo
  $n! = P(n; r_1, r_2, \ldots, r_m) r_1!r_2!\ldots r_m!$
  $\therefore P(n; r_1, r_2, \ldots, r_m) = \frac{n!}{r_1!r_2!\ldots r_m!}$

Permutação com objetos idênticos

Exemplo: número de permutações com as letras b, a, n, a, n, a.

Solução 2:

no. permutações = $P(6; 3, 2, 1) = \frac{6!}{3!2!1!} = 60$