Pós-Graduação em Ciência da Computação — DCC/ICEx/UFMG
Teoria de Linguagens — $2^{\underline{o}}$ semestre de 2002
Professor: Newton José Vieira
e-mail: nvieira@dcc.ufmg.br
Primeira Lista de Exercícios — Entrega: 04/12/02

1. Seja a função f definida *recursivamente* por:

   (a) $f(1) = 1$,

   (b) $f(2) = 5$,

   (c) $f(n) = f(n-1) + 2f(n-2)$ para $n > 2$.

   Prove por indução que $f(n) = 2^n + (-1)^n$.

2. Prove que $X = Y$ se, e somente se $X - Y = Y - X = \emptyset$.

3. Mostre que o conjunto Σ^* é enumerável para qualquer alfabeto Σ, e que o conjunto $\mathcal{P}(\Sigma^*)$ não é enumerável.

4. Expresse as linguagens a seguir utilizando operações sobre conjuntos finitos de palavras de $\{0, 1\}^*$. O alfabeto é $\{0, 1\}$ para todas.

   (a) O conjunto das palavras com `001` como subpalavra.

   (b) O conjunto das palavras que não têm mais de três 1's.

   (c) O conjunto das palavras com número par de `1`'s.

   (d) O conjunto das palavras com número par de 0's ou ímpar de 1's (ou ambos).

   (e) O conjunto das palavras em que as posições pares só têm 0's e as ímpares só têm 1's. Exemplos: λ, 1, 10, 101, etc.

   (f) O conjunto das palavras em que cada 0 é seguido de um número ímpar de 1's (antes do próximo 0, se houver, ou antes do final da palavra). Exemplos: λ, 11, 1101, 0111010111.

   Procure ser bem preciso e conciso.

5. Dê definições recursivas para as seguintes linguagens:

   (a) $\{w \in \{\mathtt{0}, \mathtt{1}\}^* \mid |w| \text{ é ímpar}\}$.

   (b) $\{0\}^*\{1\}^*$.

   (c) $\{0^n 1^n \mid n \in \mathbf{N}\}$.

   (d) $\{0^{n^2} \mid n \geq 0\}$.

6. Que linguagens são geradas pelas gramáticas a seguir?

   (a) $G_1 = (\{X, A, B\}, \{\mathtt{0}, \mathtt{1}\}, R_1, X)$.

$$
\begin{aligned}
R_1\colon\ & X \rightarrow AB \\
& A \rightarrow \mathtt{0}A \mid \lambda \\
& B \rightarrow \mathtt{1}B \mid \mathtt{1}
\end{aligned}
$$

(b) $G_2 = (\{P, I\}, \{\mathtt{0}, \mathtt{1}\}, R_2, P)$.

$$
\begin{aligned}
R_2\colon\ & P \rightarrow \mathtt{0}P \mid \mathtt{1}I \mid \lambda \\
& I \rightarrow \mathtt{0}I \mid \mathtt{1}P \mid \lambda
\end{aligned}
$$

(c) $G_3 = (\{P, X\}, \{\mathtt{0}, \mathtt{1}\}, R_3, P)$.

$$
\begin{aligned}
R_3\colon\ & P \rightarrow \mathtt{0}P\mathtt{0} \mid \mathtt{1}X \\
& X \rightarrow \mathtt{1}X\mathtt{1} \mid \lambda
\end{aligned}
$$

(d) $G_4 = (\{P, X, Z, U, \#\}, \{\mathtt{0}, \mathtt{1}\}, R_4, P)$.

$$
\begin{aligned}
R_4\colon\ & P \rightarrow X\# \\
& X \rightarrow \mathtt{0}ZX \mid \mathtt{1}UX \mid \lambda \\
& Z\mathtt{0} \rightarrow \mathtt{0}Z \\
& Z\mathtt{1} \rightarrow \mathtt{1}Z \\
& U\mathtt{0} \rightarrow \mathtt{0}U \\
& U\mathtt{1} \rightarrow \mathtt{1}U \\
& Z\# \rightarrow \#\mathtt{0} \\
& U\# \rightarrow \#\mathtt{1} \\
& \# \rightarrow \lambda
\end{aligned}
$$

7. Obtenha gramáticas para as seguintes linguagens sobre $\{\mathtt{0}, \mathtt{1}\}$:

   (a) $\{w \mid n_{\mathtt{1}}(w)\ mod\ 3 = 0\}$.

   (b) $\{w \mid n_{\mathtt{1}}(w)\ mod\ 3 > 0\}$.

   (c) $\{a^m b^n \mid m \geq n\}$.

   (d) $\{ww^R \mid w \in \{a, b\}^*\}$.

   (e) $\{w \in \{a, b\}^* \mid$ o número de a's em w é igual ao de b's$\}$.

8. Como o conceito de *redução* pode ser usado para mostrar que um problema é decidível? E como ele pode ser usado para mostrar que um problema é indecidível?

9. Construa autômatos finitos determinísticos (AFD's) para:

   (a) $\{\mathtt{01}\}^*$.

   (b) O conjunto das palavras sobre $\{0, 1\}$ com número ímpar de 1's e terminadas em 1.

   (c) $\{\mathtt{a}^k\mathtt{b}^n \mid k + n \geq 3\}$.

   (d) $\{w \in \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}^* \mid w$ não contém aabb$\}$.

   (e) $\{w \in \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}^* \mid w$ não termina com aabb$\}$.

(f) $\{w \in \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}^* \mid w$ tem número ímpar de ab's$\}$.

(g) $\{w \in \{\mathtt{0}, \mathtt{1}\}^* \mid n_{\mathtt{1}}(w) \ mod\ 3 = 1\}$.

(h) $\{w \in \{\mathtt{0}, \mathtt{1}\}^* \mid n_{\mathtt{0}}(w) \ mod\ 3 = 1$ e $n_{\mathtt{1}}(w) \ mod\ 3 = 2\}$.

10. Construa AFD's para as linguagens sobre o alfabeto $\{\mathtt{0}, \mathtt{1}\}$, a seguir. Considere que o símbolo na posição 1 de uma palavra é o primeiro símbolo desta, o símbolo na posição 2 é o segundo, e assim por diante.

    (a) O conjunto das palavras em que o símbolo na posição $2i$ é diferente do símbolo na posição $2i + 2$, para $i \geq 1$.

    (b) O conjunto das palavras em que o símbolo na posição $2i - 1$ é diferente do símbolo na posição $2i$, para $i \geq 1$.

    (c) O conjunto das palavras em que o símbolo na posição i é diferente do símbolo na posição $i + 2$, para $i \geq 1$.

    (d) O conjunto das palavras com número ímpar de 0's nas posições ímpares e número par de 0's nas posições pares.

    (e) O conjunto das palavras de tamanho par com 1's nas posições pares, acrescido das palavras de tamanho ímpar com 1's nas posições ímpares.

11. Sim ou não? Por que?

    (a) Seja $\mathcal{C}$ o conjunto de todos os programas escritos na linguagem C++ que tenham sido produzidos até as 10h 28min do dia 6 de novembro de 2002. Existe um AFD que reconhece $\mathcal{C}$.

    (b) Existe algoritmo que determina se $L(M) = \Sigma^*$ para quaquer AFD M.

    (c) Se um AFD M não reconhece palavras de tamanho menor que o número de estados de M, então não reconhece palavra alguma..

12. Sejam M_A e M_B AFD's para as linguagens A e B. Descreva um método para obter um AFD, a partir destes dois, que reconheça a diferença simétrica entre A e B, $A \bigoplus B = (A - B) \cup (B - A)$. Procure obter um método que dê o menor "trabalho" possível.

13. Construa AFN's para cada uma das seguintes linguagens, procurando utilizar o menor número de estados possível:

    (a) $\{w \in \{a, b, c\}^* \mid$ o último símbolo de w tenha ocorrido antes$\}$.

    (b) $\{w \in \{a, b, c\}^* \mid$ o último símbolo de w não tenha ocorrido antes$\}$.

    (c) $\{x\mathtt{1}y \mid x, y \in \{\mathtt{0}, \mathtt{1}\}^*$ e $\eta(y) \ mod\ 3 = 1\}$, sendo $\eta(y)$ o número representado por y na base 2.

14. Obtenha AFD's equivalentes aos AFN's da questão anterior, usando o método visto no curso.

15. Prove que os seguintes conjuntos são ou não são linguagens regulares:

    (a) $\{\mathtt{0}^m\mathtt{1}^n \mid m < n\} \cup \{\mathtt{0}^m\mathtt{1}^n \mid m > n\}$.

    (b) $\{x\mathtt{c}y \mid x, y \in \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}^*$ e $n_{\mathtt{a}}(x) = n_{\mathtt{b}}(y)\}$.

    (c) $\{\mathtt{0}^{n^2} \mid n \geq 0\}$

    (d) $\{w \in \{\mathtt{0}, \mathtt{1}\}^* \mid$ o número de $\mathtt{0}$'s em w é duas vezes o de $\mathtt{1}$'s$\}$.

    (e) $\{xyx \in \{\mathtt{0}, \mathtt{1}\}^* \mid |x| = |y|$ e $|x| \geq n\}$, onde n é um certo número (qualquer).

    (f) $\{xyx \in \{\mathtt{0}, \mathtt{1}\}^* \mid |x| = |y|$ e $|x| \leq n\}$, onde n é um certo número (qualquer).

    (g) $\{\mathtt{0}^n\mathtt{1}^i\mathtt{2}^j \mid n > i + j\}$.

16. Mostre que a classe das linguagens regulares é fechada sob as seguintes operações:

    (a) $\mathit{pref}_a(L) = \{x \mid xa \in L\}$, onde a é um certo símbolo do alfabeto de L.

    (b) $\mathit{pref}(L) = \{x \mid xy \in L\}$ (os prefixos das palavras de L).

    (c) $\mathit{suf}_a(L) = \{y \mid ay \in L\}$, onde a é um certo símbolo do alfabeto de L.

    (d) $\mathit{suf}(L) = \{y \mid xy \in L\}$ (os sufixos das palavras de L).

    (e) $\mathit{subp}(L) = \{y \mid xyz \in L\}$ (as subpalavras das palavras de L).

17. Sejam L_1 e L_2 duas linguagens. Mostre que sim ou que não:

    (a) se $L_1 \subseteq L_2$ e L_2 é uma linguagem regular, então L_1 é uma linguagem regular.

    (b) se L_1L_2 é uma linguagem regular então L_1 é uma linguagem regular.

    (c) se L_1^* é uma linguagem regular então L_1 é uma linguagem regular.

    (d) se L_1 e L_2 não são regulares, $L_1 \cup L_2$ não é regular.

    (e) se L_1 não é regular e L_2 é regular, $L_1 \cup L_2$ não é regular.

    (f) se L_1 não é regular e L_2 é finita, $L_1 \cup L_2$ não é regular.