Pós-Graduação em Ciência da Computação DCC/ICEx/UFMG
Teoria de Linguagens $2^{\underline{o}}$ semestre de 2003
Professor: Newton José Vieira
e-mail: nvieira@dcc.ufmg.br

Trabalho Especial/Solução do professor

1. Segue uma definição recursiva do conjunto dos palíndromos sobre Σ, Pal:

   (a) $\lambda \in Pal$;

   (b) $a \in Pal$ para todo $a \in \Sigma$;

   (c) se $x \in Pal$ e $a \in \Sigma$ então $axa \in Pal$;

   (d) nenhuma palavra é membro de Pal, a menos que possa ser obtida como mostrado em a, b e c.

   O conjunto dos palíndromos sobre Σ pode também ser definido utilizando-se a operação *reverso*: $Pal' = \{w \in \Sigma^* \mid w = w^R\}$. A operação reverso, por sua vez pode ser assim definida:

   (a) $\lambda^R = \lambda$;

   (b) $(xa)^R = ax^R$ para quaisquer $x \in \Sigma^*$ e $a \in \Sigma$.

   Prove que $Pal = Pal'$.

   Solução: Inicialmente, será provado que $Pal \subseteq Pal'$. Será usada indução sobre o número de aplicações do passo (c) da definição de Pal. As únicas palavras de Pal obtidas sem aplicações do passo (c) são λ (passo (a)) e a para cada $a \in \Sigma$ (passo (b)). Tem-se que $\lambda \in Pal'$, pois $\lambda^R = \lambda$ por (a) da definição de reverso; e $a \in Pal'$, pois $a^R = a$:

$$\begin{aligned} a^R &= (\lambda a)^R \\ &= a\lambda^R && \text{pela definição de reverso} \\ &= a\lambda && \text{pela definição de reverso} \\ &= a \end{aligned}$$

   Seja x uma palavra arbitrária de Σ^*, e suponha, como hipótese de indução, que se $x \in Pal$ enão $x \in Pal'$. Resta provar, então, que para qualquer $a \in \Sigma$ se $axa \in Pal$ então $axa \in Pal'$, ou seja $(axa)^R = axa$, o que é feito a seguir:

$$\begin{aligned} (axa)^R &= a(ax)^R && \text{pela definição de reverso} \\ &= a(x^R a^R) && \text{pois } (xy)^R = y^R x^R \\ &= (ax^R)a^R \\ &= (ax^R)a && \text{pois } a^R = a\text{, como visto acima} \\ &= axa && \text{pela hipótese de indução} \end{aligned}$$

   Portanto, $Pal \subseteq Pal'$.

   Agora será provado que $Pal' \subseteq Pal$. Para isto, será mostrado, por indução sobre $|w|$ que se $w \in Pal'$ então $w \in Pal$. A única palavra de tamanho 0 é λ; e $\lambda \in Pal$, por definição. Suponha, como hipótese de indução, que se $x \in Pal'$ enão $x \in Pal$ para palavras x tais que $|x| \leq n$. Basta então mostrar que se $|w| = n + 1$ e $w \in Pal'$ enão $w \in Pal$. Se $|w| = 1$, $w \in Pal$ pela definição. Suponha que $|w| \geq 2$. Então $w = axb$ para algum $a, b \in \Sigma$. Como $w \in Pal'$, $w^R = w$. Mas $w^R = (axb)^R = b(xb)^R$ pela definição de reverso. Mas axb (que é w) só pode ser igual a $b(xb)^R$ (que é w^R), se $a = b$; logo, $w = axa$. Tem-se também que:

$$\begin{aligned} w^R &= (axa)^R \\ &= a(ax)^R && \text{pela definição de reverso} \\ &= ax^R a^R && \text{pois } (xy)^R = y^R x^R \\ &= ax^R a && \text{pois } a^R = a\text{, como visto acima} \end{aligned}$$

Como $w^R = w$, segue-se que $x^R = x$; logo, $x \in Pal'$. Como $|x| \leq n$, tem-se pela hipótese de indução que $x \in Pal$. Finalmente, pela definição de Pal, $axa = w \in Pal$.

2. Seja, para $n \geq 1$ e $b \geq 2$,

$$L_{n,b} = \{x \in \{0, 1, \ldots, b-1\}^* \mid \eta_b(x) \ mod\, n = 0\},$$

onde $\eta_b(x)$ é o número representado por x na base b. Na Seção 2.1.2 da apostila foi mostrado um AFD para $L_{6,2}$. Em anexo, segue um trecho de Kozen[1] em que é mostrado como construir um AFD para $L_{3,2}$, e onde está desenvolvida uma prova da correção de tal AFD. Generalize o método e a prova para n e b arbitrários.

3. Seja a linguagem:

$$L = \{a^i b^j c^k \mid i \neq j \ ou\, j \neq k\}.$$

Suponha que na aplicação do lema do bombeamento (LB) para provar que L não é regular, seja escolhida $z = a^k b^{k!+k} c^{k!+k}$, onde k é a constante do LB. Descubra a razão "misteriosa" para tal escolha.

4. Mostre que as linguagens regulares são fechadas sob a operação *metade*:

$$metade(L) = \{x \mid xy \in L \ e\ |x| = |y|\}.$$

Sugestão: mostre como obter um AF M' tal que $L(M') = metade(L)$, a partir de um AF M para L; em seguida, prove que M' reconhece $metade(L)$.

5. Construa AFNλ's para as linguagens a seguir, usando transições λ para *simplificar* a concepção.

   (a) O conjunto das palavras que consistem de zero ou mais `a`'s, seguidos por zero ou mais `b`'s, seguidos por zero ou mais `c`'s.

   (b) O conjunto das palavras que consistem, ou de `01` repetida uma ou mais vezes, ou de `010` repetida uma ou mais vezes.

   (c) O conjunto das palavras de `0`'s e `1`'s tais que pelo menos uma das dez últimas posições contém `1`.

[1] Kozen, D.C. *Automata and Computability*, Springer, 1997.