Pós-Graduação em Ciência da Computação — DCC/ICEx/UFMG
Teoria de Linguagens — $2^{\underline{o}}$ semestre de 2014
Professor: Newton José Vieira
Primeira Lista de Exercícios — Entrega: até 16:40h de 23/10.

Observações:

- O uso do software JFLAP, sugerido na página da disciplina, pode ser conveniente para solução de alguns exercícios.
- Referências são relativas a livros mencionados no Plano de Curso.

1. Sejam $A = \{\texttt{00}, \texttt{11}\}$, $B = \{\texttt{01}, \texttt{10}\}$ e $C = \{\lambda, \texttt{1}\}$. Calcule:

   a) AA;
   b) AC;
   c) CCC;
   d) ABC;
   e) $A(B \cup C)$.

2. Sejam $\Sigma = \{\texttt{0}, \texttt{1}\}$, $A = \Sigma^*\{\texttt{0}\}$ e $B = \{\texttt{1}\}\Sigma^*$. Descreva, em português, as linguagens a seguir. Não é necessário dizer que as palavras são de 0s e 1s. Por exemplo, A é o "conjunto das palavras que terminam com 0".

   a) $A \cup B$;
   b) $A \cap B$;
   c) $A - B$;
   d) AB.

3. Sejam $A = \{\texttt{a}\}$ e $B = \{\texttt{bb}\}$. Quantas palavras de n símbolos, para cada $n \geq 0$, há em:

   (a) A^*B?
   (b) AB^*?
   (c) A^*B^*?

4. Descreva mais formalmente as seguintes linguagens sobre o alfabeto $\{\texttt{0}, \texttt{1}\}$:

   a) o conjunto das palavras com, no mínimo, um 0;
   b) o conjunto das palavras com, no máximo, um 0;
   c) o conjunto das palavras de tamanho ímpar;
   d) o conjunto das palavras com um prefixo de um ou mais 0s seguido (imediatamente) de um sufixo de zero ou mais 1s;
   e) o conjunto dos palíndromos que não tenham símbolos consecutivos idênticos;
   f) o conjunto das palavras de tamanho par cuja primeira metade é idêntica à segunda.

   Procure ser bem preciso e conciso.

5. Descreva, em português, as seguintes linguagens sobre o alfabeto $\{\texttt{0}, \texttt{1}\}$:

   a) $\{\texttt{0}, \texttt{1}\}^*\{\texttt{1}\}\{\texttt{0}, \texttt{1}\}$;

b) $\{\texttt{0}\}\{\texttt{0},\texttt{1}\}^* \cup \{\texttt{0},\texttt{1}\}^*\{\texttt{1}\}$;

c) $\{\texttt{0},\texttt{1}\}^*\{\texttt{01}\}\{\texttt{11}\}$;

d) $\{\texttt{01},\texttt{1}\}^*$.

e) $\{\texttt{1},\lambda\}(\{\texttt{0}\}\{\texttt{0}\}^*\{\texttt{1}\})^*\{\texttt{0}\}^*$.

6. Expresse as linguagens a seguir utilizando as operações sobre *conjuntos finitos* de palavras de $\{\texttt{0},\texttt{1}\}^*$. Considere o alfabeto como sendo $\{\texttt{0},\texttt{1}\}$.

   a) o conjunto das palavras que têm de 1 a 200 símbolos;

   b) o conjunto das palavras que começam e terminam com o mesmo símbolo;

   c) o conjunto das palavras que contêm pelo menos um `0` e um `1`;

   d) o conjunto das palavras que começam com `0` e contêm `00`;

   e) o conjunto das palavras que não têm `00` como prefixo, mas têm `00` como sufixo;

   f) o conjunto das palavras que começam com `00` ou `11` e terminam com `01` ou `10`;

   g) $\{\texttt{01}^n\texttt{0} \mid n \text{ é ímpar}\}$;

   h) o conjunto das palavras de $\{\texttt{0}\}^*\{\texttt{1}\}^*$ de tamanho par.

7. Seja a linguagem X, de alfabeto $\{\texttt{a},\texttt{b}\}$, definida assim:

   a) $\lambda \in X$;

   b) se $x \in X$ então $\texttt{a}x \in X$ e $\texttt{a}x\texttt{b}x \in X$;

   c) $x \in X$ somente se pode ser obtido como especificado em (a) e (b).

   Sejam $n_\texttt{a}(x)$ e $n_\texttt{b}(x)$ o numero de `a`s e de `b`s, respectivamente, na palavra x. Prove, por indução, que $n_\texttt{a}(x) \geq n_\texttt{b}(x)$.

8. Construa gramáticas para as seguintes linguagens:

   a) $\{\texttt{0}\}\{\texttt{0},\texttt{1}\}^*\{\texttt{11}\}$;

   b) $\{\lambda,\texttt{0}\}\{\texttt{11}\}^*\{\lambda,\texttt{0}\}$;

   c) $\{w \in \{\texttt{a},\texttt{b}\}^* \mid \text{ o número de } \texttt{a}\text{s em } w \text{ é par}\}$;

   d) $\{w \in \{\texttt{a},\texttt{b}\}^* \mid w = w^R\}$;

   e) $\{w \in \{\texttt{a},\texttt{b}\}^* \mid w = w^R \text{ e } w \text{ não contém símbolos consecutivos idênticos}\}$.

9. Diga que linguagens são geradas pelas gramáticas:

   (a) $G_1 = (\{A\},\{\texttt{0},\texttt{1}\},R_1,A)$, sendo R_1 constituído de:

   $A \to \texttt{0}A \mid A\texttt{0} \mid \texttt{1}$

   (b) $G_2 = (\{B\},\{\texttt{0},\texttt{1}\},R_2,B)$, sendo R_2 constituído de:

   $B \to \texttt{0}B\texttt{00} \mid \texttt{1}$

   (c) $G_3 = (\{S,A,B\},\{\texttt{0},\texttt{1}\},R_3,S)$, sendo R_3 constituído de:

   $S \to AA \mid B$
   $A \to \texttt{0}A \mid A\texttt{0} \mid \texttt{1}$
   $B \to \texttt{0}B\texttt{00} \mid \texttt{1}$

10. Sejam os PDs:

a) determinar se um número natural n, para $1 \leq n \leq 200$, é um número primo;

b) dada uma equação do segundo grau de coeficientes a, b e c, determinar se suas raízes são ambas reais, se cada um dos coeficientes é um número natural entre 10 e 20 (exclusive);

c) dada uma equação do segundo grau de coeficientes a, b e c, determinar se suas raízes são ambas reais, se seus coeficientes podem ser números reais quaisquer;

d) dada uma fórmula da lógica de predicados, determinar se ela é válida;

e) dados dois conjuntos finitos, determinar se eles são disjuntos;

f) determinar se uma árvore A tem altura menor ou igual a n;

g) determinar se uma palavra w é palíndromo, se $w \in \{\mathtt{0}, \mathtt{1}\}^*$.

Dizer quantos parâmetros e quantas instâncias tem cada um.

11. Dentre os PDs a seguir, quais são decidíveis?

a) Determinar se existe vida extraterrestre.

b) Dado um número natural n, determinar se existe um par de números primos gêmeos maior que n. (m e n são primos gêmeos sse são ambos primos e $|m - n| = 2$. Atualmente não se sabe se o conjunto dos primos gêmeos é finito ou não.)

c) Dado um conjunto finito de números naturais, determinar se ele contém algum número primo.

d) Dado um programa em C (sem entrada) que tenha no máximo 1GB, determinar se ele para.

e) dada uma equação do segundo grau de coeficientes a, b e c, determinar se suas raízes são ambas reais, se cada um dos coeficientes é um número natural entre 10 e 20 (exclusive);

f) dada uma equação do segundo grau de coeficientes a, b e c, determinar se suas raízes são ambas reais, se seus coeficientes podem ser números reais quaisquer;

g) Dados dois conjuntos finitos, determinar se eles são disjuntos.

12. Diz-se que um PD P é *redutível* a um PD Q, se existe um algoritmo $\mathcal{R}$ que, recebendo x como entrada, produz um resultado y tal que a resposta a P para a entrada x é idêntica ou complementar (a resposta complementar a *sim* é *não*, e a *não* é *sim*) à resposta a Q para a entrada y, qualquer que seja a entrada x. Diz-se, com isso, que o algoritmo $\mathcal{R}$ pode ser usado para *reduzir* o problema P ao problema Q.

Seja D um PD decidível e I um PD indecidível. O que se pode dizer de um PD X, com relação à sua decidibilidade, se:

a) D é redutível a X?

b) X é redutível a D?

c) I é redutível a X?

d) X é redutível a I?

13. Construa um diagrama de estados para uma máquina que, dada uma sequência de moedas de 25 e 50 centavos e de 1 real, forneça uma lata de refrigerante quando a sequência totalizar 1 real ou mais.

14. Faça um diagrama de estados, similar àquele do quebra-cabeça leão-raposa-repolho para o problema dos missionários e canibais:

    Três missionários e três canibais devem atravessar um rio. Para isso, dispõem de uma canoa que pode transportar no máximo duas pessoas de cada vez. Durante a travessia, se o número de canibais for maior que o de missionários em qualquer uma das margens, os canibais comem os missionários. Determinar um plano para travessia em que nenhum missionário seja devorado.

15. Faça um diagrama de estados para uma máquina que determine se uma sequência ternária (com dígitos 0, 1 e 2) é divisível por 4.

16. Projete um diagrama de estados para modelar o problema:

    Existem duas jarras, uma com capacidade de 4l e outra de 3l, ambas sem nenhuma marcação de medida. Há uma torneira que fornece água à vontade. Como se deve agir para colocar 2 litros de água em uma das jarras, começando com ambas vazias?

    Não é necessário desenhar o diagrama de estados todo. Basta dizer como ele pode ser construído. Além disso, apresente uma solução para o problema mostrando a sequência de transições respectiva. *Dica*: considere como conjunto dos estados (conteúdos possíveis das jarras): $\{(j_1, j_2) \in \mathbb{N} \,|, 0 \leq j_1 \leq 3 \text{ e } 0 \leq j_2 \leq 4\}$.

17. Construa AFDs para as seguintes linguagens:

    a) $\{\lambda, \mathtt{0}\}^2$;
    b) $\{w \in \{\mathtt{0},\mathtt{1}\}^* \,|\, \text{cada } \mathtt{0} \text{ de } w \text{ é imediatamente seguido de, no mínimo, dois } \mathtt{1}\text{s}\}$;
    c) $\{w \in \{\mathtt{0},\mathtt{1}\}^* \,|\, \text{os primeiros quatro símbolos de } w \text{ contêm, no mínimo, dois } \mathtt{1}\text{s}\}$;
    d) $\{w \in \{\mathtt{0},\mathtt{1}\}^* \,|\, w \text{ não contém } \mathtt{000} \text{ nem } \mathtt{111}\}$;
    e) $\{w \in \{\mathtt{0},\mathtt{1}\}^* \,|\, \text{os últimos três símbolos de } w \textbf{ não } \text{são } \mathtt{000}\}$;
    f) $\{w \in \{\mathtt{0},\mathtt{1},\mathtt{2}\}^* \,|\, w \text{ tem número par de } \mathtt{0}\text{s, par de } \mathtt{1}\text{s e par de } \mathtt{2}\text{s}\}$.

18. Minimize o AFD $(\{1,2,3,4,5,6\}, \{\mathtt{0},\mathtt{1}\}, \delta, 1, \{2,6\})$ em que δ é dada por:.

δ	0	1
1	2	3
2	2	3
3	5	4
4	1	3
5	6	4
6	2	4

19. Utilizando a técnica do Teorema 4 (produto de AFDs), determine AFDs que reconheçam (a) a união e (b) a interseção das linguagens:

    - $\{w \in \{\mathtt{0},\mathtt{1}\}^* \,|\, |w| \bmod 3 = 0\}$ e
    - $\{w \in \{\mathtt{0},\mathtt{1}\}^* \,|\, \text{cada } \mathtt{0} \text{ de } w \text{ é imediatamente seguido de, no mínimo, dois } \mathtt{1}\text{s}\}$.

20. Sim ou não? Por que?

    (a) Existe algoritmo que determina se $L(M_1) \subset L(M_2)$ para quaisquer AFDs M_1 e M_2.

(b) Se um AFD M reconhece alguma palavra de tamanho igual ao número de estados, k, de M, então $|L(M)| > k \times 1000^{1000}$.

(c) Se $X \subseteq Y \subseteq Z$ e existem AFDs que reconhecem X e Z, então existe AFD que reconhece Y.

(d) Se $X \subseteq Y \subseteq Z$ e não existem AFDs que reconhecem X nem Z, então não existe AFD que reconhece Y.

21. Construa autômatos finitos não determinísticos (AFNs) para cada uma das seguintes linguagens, procurando utilizar o menor número de estados possível:

    (a) $\{\mathtt{a}\} \cup \{\mathtt{b}\}^+$. O AFN deve ter apenas um estado final e não pode ter transição λ. (Linz (1997), ex. 8, pág. 64.)

    (b) $\{w \in \{\mathtt{a},\mathtt{b},\mathtt{c}\}^* \mid$ o último símbolo de w tenha ocorrido antes$\}$. (Hopcroft et al. (2001), ex. 2.3.4(a), pág. 67.)

    (c) $\{w \in \{\mathtt{a},\mathtt{b},\mathtt{c}\}^* \mid$ o último símbolo de w não tenha ocorrido antes$\}$. (Hopcroft et al. (2001), ex. 2.3.4(b), pág. 67.)

    (d) $\{x\mathtt{1}y \in \{\mathtt{0},\mathtt{1}\}^* \mid |x| \, mod \, 3 = 1$ e $\eta(y) \, mod \, 3 = 1\}$, sendo $\eta(y)$ o número representado por y na base 2.

22. Obtenha AFDs equivalentes aos AFNs dos dois primeiros itens da questão anterior, usando o método visto no curso (*subset construction*).

23. Prove que os seguintes conjuntos não são linguagens regulares utilizando o lema do bombeamento:

    (a) $\{\mathtt{0}^n y \mid y \in \{\mathtt{0},\mathtt{1}\}^*$ e $|y| < n\}$;

    (b) $\{x\overline{x} \mid x \in \{\mathtt{0},\mathtt{1}\}^*\}$.

24. Seja L uma linguagem regular sobre o alfabeto $\{\mathtt{a},\mathtt{b},\mathtt{c}\}$. Mostre que cada uma das linguagens seguintes é regular:

    a) $\{w \in L \mid w$ contém pelo menos um $\mathtt{a}\}$;

    b) $\{w \mid w \in L$ ou w contém pelo menos um $\mathtt{a}$ (ou ambos)$\}$;

    c) $\{w \mid$ ou $w \in L$ ou w contém pelo menos um $\mathtt{a}\}$;

    d) $\{w \notin L \mid w$ não contém $\mathtt{as}\}$.

25. Sejam L_1 e L_2 duas linguagens. Mostre que sim ou que não:

    (a) se L_1 e L_2 não são regulares, $L_1 \cup L_2$ não é regular.

    (b) se L_1 e L_2 não são regulares, $L_1 \cap L_2$ não é regular.

    (c) se L_1 não é regular, $\overline{L_1}$ não é regular.

    (d) se L_1 é regular e L_2 não é regular, $L_1 \cup L_2$ não é regular.

    (e) se L_1 é regular, L_2 não é regular e $L_1 \cap L_2$ é regular, $L_1 \cup L_2$ não é regular.

    (f) se L_1 é regular, L_2 não é regular e $L_1 \cap L_2$ não é regular, $L_1 \cup L_2$ não é regular.

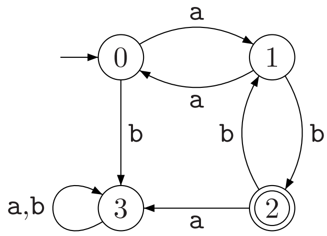
    (Martin (1991), ex. 8.6, pág. 153.)

26. Construa AFDs que reconheçam as linguagens denotadas pelas expressões regulares (ERs):

    (a) $(aa + b)^*baab$.

(b) $((aa + bb)^* cc)^*$.

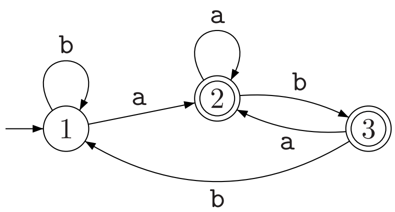
27. Seja o AFD:



(a) Obtenha uma ER que denote a linguagem reconhecida.

(b) Descreva a linguagem em português.

28. Seja o AFD:



Obtenha uma ER que denote a linguagem reconhecida.

29. Obtenha ERs para as seguintes linguagens, a partir de um AF para as mesmas, usando o método visto em aula:

(a) $\{w \in \{\texttt{0}, \texttt{1}\}^* \mid w$ não contém $\texttt{001}\}$.

(b) $\{w \in \{\texttt{0}, \texttt{1}\}^* \mid \eta(w) \bmod 3 \neq 0\}$.

30. Uma ER está na **forma normal disjuntiva** se ela está na forma $r_1 + r_2 + \cdots + r_n$ para algum $n \geq 1$, sendo que nenhuma das subERs r_i contém ocorrência de "+". Mostre que toda ER é equivalente a uma outra na forma normal disjuntiva. (Lewis & Papadimitriou (1998), prob. 1.8.7.[1])

[1] **Atenção! Serviço de utilidade pública: não compre nem consulte a versão traduzida deste livro, pois ela é de péssima qualidade!**