A tese de Church-Turing

Vítor De Araújo

27 de abril de 2014

1 Introdução

Na década de 1920, David Hilbert e Wilhelm Ackermann propuseram o que tornou-se conhecido como o Entscheidungsproblem ("problema de decisão"). O problema pode ser enunciado como: existe um método efetivo que, dados uma proposição em lógica de primeira ordem e um conjunto de axiomas, determine se a proposição é verdadeira? Nesse contexto, torna-se necessário definir um modelo formal que capture a noção intuitiva de um método efetivo, i.e., um conjunto finito de instruções que produzem uma resposta em uma quantidade finita de passos.

Na década de 1930, diversos formalismos foram propostos com esse objetivo. Dentre eles, destacam-se a máquina de Turing e o cálculo lambda de Church. Ambos os modelos de computação foram provados equivalentes, i.e., ambos são capazes de computar a mesma classe de funções. Essa equivalência em poder de expressão de dois formalismos definidos de maneiras radicalmente diferentes levou à proposição de que a classe de funções computadas pelos mesmos corresponde à classe das funções efetivamente calculáveis: qualquer outro formalismo para descrever procedimentos efetivamente calculáveis seria equivalente aos modelos já propostos. Todavia, uma vez que a noção de "efetivamente calculável" não é uma definição formal, e sim apenas uma noção intuitiva, tal proposição não é um teorema, mas sim apenas uma conjectura. Essa conjectura é denominada Tese de Church-Turing. Posteriormente, diversos outros formalismos para descrição de funções computáveis, tais como as funções μ-recursivas de Kleene, foram provados equivalentes à máquina de Turing e ao cálculo lambda, dando mais força à veracidade da tese. Hoje em dia, a Tese de Church-Turing é amplamente aceita como uma definição adequada de o que é efetivamente calculável.

Tanto Church quanto Turing demonstraram que, em seus respectivos modelos de computação, o Entscheidungsproblem é indecidível: não existe uma máquina de Turing ou uma função no cálculo lambda capaz de determinar se uma proposição arbitrária em lógica de primeira ordem é verdadeira. Diversos outros problemas foram demonstrados indecidíveis nesses modelos de computação. Um exemplo clássico é o problema da parada, que consiste em determinar se a execução de uma dada máquina de Turing termina em um número finito de passos para uma dada entrada ou, analogamente, se uma dada fórmula em cálculo lambda possui uma forma normal. A importância de Tese de Church-Turing reside no fato de que, se a máquina de Turing representa adequadamente o que é efetivamente calculável, os limites de o que a máquina de Turing é capaz de fazer representam limites teóricos de computabilidade dos quais, em tese, não poderíamos escapar. Um estudo dos limites da computação é útil para que evitemos tentar solucionar problemas para os quais se sabe que uma solução é impossível.

2 Modelos de computação super-Turing

Embora a Tese de Church-Turing seja amplamente aceita, diversos modelos de computação foram propostos buscando abranger uma classe de funções maior do que as computáveis pela máquina de Turing. Esta seção discute algumas dessas propostas.

2.1 Modelos fisicamente não-realizáveis

Diversos modelos super-Turing foram propostos como objeto de interesse teórico, mas cuja realização física é impossível. Dentre eles, pode-se citar a máquina de Turing com oráculo, uma máquina de Turing acrescida de uma “caixa preta” capaz de produzir o resultado de uma função ou predicado não computável por máquinas de Turing convencionais. Uma vez que a definição de tais máquinas não inclui uma descrição de um procedimento finito para a operação da caixa preta, elas não representam uma violação da Tese de Church-Turing.

Outro modelo de computação super-Turing não realizável é a máquina de Zenão, que é capaz de realizar um número infinito de passos em uma quantidade finita de tempo, o primeiro passo sendo concluído em uma unidade de tempo e cada passo posterior em metade do tempo do passo anterior. Tal dispositivo executaria um número infinito de passos em duas unidades de tempo e, assim, seria capaz de resolver o problema da parada para máquinas de Turing, por exemplo, simulando a máquina e verificando, em tempo finito, se ela termina após um número infinito de passos. Porém, tal definição produz paradoxos, no sentido de que o estado final da máquina após duas unidades de tempo (i.e., após a execução de infinitos passos) é indefinido; a menos que a máquina pare em um número finito de passos, caso em que ela é equivalente à máquina de Turing, o conteúdo da fita após duas unidades de tempo não é bem-definido, o que torna o modelo inviável mesmo em teoria.

2.2 Modelos de realização física questionável

Diversos modelos envolvendo computação com números reais de precisão arbitrária foram propostos. Siegelmannn e Sontag (1994) propuseram a Rede Neural Recorrente Analógica (ARNN), um modelo de rede neural em que é equivalente à máquina de Turing se os pesos dos neurônios forem restritos a números racionais, mas é super-Turing se os pesos puderem assumir pesos reais arbitrários. Outro modelo de computação baseado na habilidade de computar com números reais de precisão arbitrária é a máquina de Blum-Shub-Smale (1989). Nesse modelo, os autores demonstram que certas funções recursivamente enumeráveis são computáveis. Entretanto, a construção de máquinas capazes de lidar com números reais de precisão arbitrária confronta limites físicos teóricos, tais como o limite de entropia em um volume finito de espaço.

2.3 Modelos fisicamente realizáveis

Wegner (1997) argumenta que a máquina de Turing é um modelo adequado para expressar o que é computável por algoritmos, mas que algoritmos não são uma boa formulação da noção intuitiva de computabilidade, pois algoritmos não incluem a possibilidade de interação. Sistemas interativos, argumenta Wegner, são mais poderosos do que sistemas algorítmicos, pois são capazes de empregar inteligência presente no ambiente para realizar tarefas. Por exemplo, um sistema interativo pode jogar xadrez com dois mestres simultaneamente, replicando os movimentos de um mestre como sua jogada com o outro; o sistema em si não contém inteligência, mas é capaz de exibir comportamento inteligente empregando a inteligência proveniente de suas entradas. A habilidade de interação, assim, funciona como um oráculo, um elemento externo ao sistema capaz de produzir respostas a certos problemas por meios não especificados no sistema.

Fica então a questão de se sistemas interativos realmente possuem um poder de expressão maior do que o da máquina de Turing. Embora à primeira vista um sistema interativo seja capaz de comportamentos mais ricos do que os possíveis em uma máquina de Turing, isso ocorre porque parte da operação do sistema é externa à descrição do sistema. Uma vez que todas as partes envolvidas na computação, incluindo agentes externos (possivelmente humanos), sejam consideradas como um sistema único, o sistema passa a ser não-interativo. A menos que algum elemento envolvido nesse sistema possua um poder de computação super-Turing (e.g., no caso de seres humanos serem capazes de raciocínios não simuláveis em uma máquina de Turing), não é evidente que o sistema resultante seja super-Turing.

Assim, o modelo de máquinas interativas parece mais conveniente do que a máquina de Turing para modelar sistemas computacionais modernos, não só porque a maioria dos programas empregados hoje em dia são interativos, não se encaixando bem no modelo de computação da máquina de Turing, que assume uma execução ininterrupta e não-interativa a partir de uma entrada predeterminada, como também porque sistemas interativos permitem descrever um sistema maior em termos de módulos menores que se comunicam entre si, mas não precisam ter conhecimento do funcionamento um do outro. (De fato, interação com usuários pode ser vista um caso particular de sistema modular em que um ou mais módulos são seres humanos.) Porém, o modelo interativo não parece expandir a classe de funções computáveis; mesmo no caso de o raciocínio humano ser super-Turing, o que não é evidente, o poder de expressão do sistema interativo como um todo não advém da capacidade de interação, mas sim do fato de o sistema completo, incluindo o humano, incluir um elemento super-Turing.

3 Conclusão

Embora a máquina de Turing e o cálculo lambda tenham sido formulados há mais de setenta anos, esses formalismos permanecem relevantes como modelos de computabilidade ainda hoje. Dos modelos supostamente super-Turing analisados, ou trata-se de modelos fisicamente não-realizáveis dado o entendimento teórico atual da física, o que torna tais modelos interessantes de um ponto de vista teórico mas pouco úteis para definir os limites do efetivamente computável no mundo real, ou, no caso das máquinas interativas, de um modelo possivelmente mais conveniente para modelar os sistemas computacionais modernos, mas que em última instância não define por si só uma classe de funções computáveis maior do que a máquina de Turing.

4 Referências

Church, A. *An Unsolvable Problem of Elementary Number Theory.* American Journal of Mathematics, Vol. 58, No. 2 (Apr., 1936), pp. 345-363.

Turing, A. *On Computable Numbers, with an Application to the Entscheidungsproblem.* Proceedings of the London Mathematical Society, Ser. 2, Vol. 42, 1937.

Turing, A. *Systems of Logic Based on Ordinals (PhD thesis).* Princeton University.

Leeuwen, J.; Wiedermann, J. *On Algorithms and Interaction.* In Mathematical Foundations of Computer Science 2000, pp. 99-113. Springer-Verlag.

Wegner, P. *Why Interaction is More Powerful Than Algorithms.* Communications of the ACM, May 1997, pp. 80-91.

Siegelmann, H.; Sontag, E. *Analog computation via neural networks.* Theoretical Computer Science, 1994, pp. 331-360.

Blum, L.; Shub, M.; Smale, S. *On a Theory of Computation and Complexity over the Real Numbers: NP-completeness, Recursive Functions and Universal Machines.* Bulletin of the American Mathematical Society 21 (1), 1989.

Lloyd, S. *Ultimate physical limits to computation.* Nature 406.6799, 2000, pp. 1047-1054.

Potgieter, P. *Zeno machines and hypercomputation.* Theoretical Computer Science, Volume 358, Issue 1, 31 July 2006, pp. 23-33.