Departamento de Ciência da Computação | ICEx/UFMG
Teoria de Linguagens | $2^{\underline{o}}$ semestre de 2017
Professor: Newton José Vieira
Primeira Lista de Exercícios | Data de entrega: 19/9/2017 | Valor: 10 pontos

1. Uma versão do *problema da parada*, problema este a ser abordado no Capítulo 5, é: dado um programa (sem entrada), determinar se ele para. Lá no Capítulo 5 será visto que não existe algoritmo que, recebendo como entrada um (texto de) programa qualquer em Java (ou em outra linguagem de programação), determine se ele para ou não. Em outras palavras, o problema da parada não é computável. Sabendo disto, argumente que o problema "dado um programa qualquer em Java, determinar se ele emitirá algum sinal sonoro", também não é computável.

2. Seja $\Sigma = \{\mathtt{0}, \mathtt{1}, \mathtt{\#}\}$. Sejam k e n números naturais tais que $k \leq n$.
   a) Quantas palavras há na linguagem Σ^k?
   b) Quantas palavras há na linguagem $(\Sigma \cup \{\lambda\})^k$?
   c) Quantas palavras de n símbolos contêm exatamente k ocorrências de `#`?
   d) Quantas palavras de n símbolos contêm no máximo k ocorrências de `#`?

3. Seja Σ um alfabeto. Prove que se $x, y, w \in \Sigma^*$ e $xw = yw$, então $x = y$.

4. Sejam $\Sigma = \{\mathtt{0}, \mathtt{1}\}$, $A = \Sigma^*\{\mathtt{0}\}$ e $B = \{\mathtt{1}\}\Sigma^*$. Descreva, em português, as linguagens a seguir. Não é necessário dizer que as palavras são de `0`s e `1`s. Por exemplo, A é o "conjunto das palavras que terminam com `0`".
   a) $A \cup B$;
   b) $A \cap B$;
   c) $A - B$;
   d) $B - A$;
   e) $\overline{A}$;
   f) AB;
   g) BA.

5. Sejam $A = \{\lambda, \mathtt{a}\}$ e $B = \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}$. Determine A^nB, AB^n e A^nB^n. Quantos elementos tem cada um desses conjuntos?

6. Descreva, em português, as seguintes linguagens sobre o alfabeto $\{\mathtt{0}, \mathtt{1}\}$:
   a) $\{\mathtt{0}, \mathtt{1}\}^*\{\mathtt{1}\}\{\mathtt{0}, \mathtt{1}\}$;
   b) $\{\mathtt{0}\}\{\mathtt{0}, \mathtt{1}\}^* \cup \{\mathtt{0}, \mathtt{1}\}^*\{\mathtt{1}\}$;
   c) $\{\mathtt{0}, \mathtt{1}\}^*\{\mathtt{01}\}\{\mathtt{11}\}$;
   d) $\{\mathtt{01}, \mathtt{1}\}^*$.
   e) $\{\mathtt{1}, \lambda\}(\{\mathtt{0}\}\{\mathtt{0}\}^*\{\mathtt{1}\})^*\{\mathtt{0}\}^*$;

f) $\{\texttt{0}\}^*\{\texttt{1}\}(\{\texttt{0}\} \cup \{\texttt{1}\}\{\texttt{0}\}^*\{\texttt{1}\})^*$.

7. Seja Σ o conjunto de todas as 26 letras do alfabeto e C o conjunto das 21 consoantes. Seja D o conjunto de todas as palavras de um dicionário da lingua portuguesa, e, para cada letra $l \in \Sigma$, seja $P_l = \{w \in D \,|\, w \text{ contém a letra } l\}$. A partir de tais conjuntos, usando operações sobre conjuntos, concatenações e fechos de Kleene, descreva o conjunto das palavras:
   a) que contêm pelo menos uma das letras A, B ou C;
   b) que contêm as letras A e B, mas não C;
   c) que não contêm A nem B;
   d) que começam com a letra A;
   e) que começam com a letra A e contêm pelo menos uma consoante;
   f) que contêm a subpalavra RR.

8. Sejam A, B e C linguagens sobre um alfabeto Σ. Mostre que:
   a) $A(B \cup C) = (AB) \cup (AC)$;
   b) nem sempre $A(B \cap C) = (AB) \cap (AC)$.

9. Prove que não existe $x \in \{\texttt{0}, \texttt{1}\}^*$ tal que $\texttt{0}x = x\texttt{1}$.

10. Seja a gramática $G = (\{A, B\}, \{\texttt{a}, \texttt{b}\}, R, A)$ em que R é constituído pelas quatro regras:

$$A \to \texttt{a}A \,|\, B$$
$$B \to \texttt{b}B \,|\, \lambda$$

   Apresente um esquema de derivação que mostre como derivar qualquer palavra de $L(G)$. Expresse o que é $L(G)$ de forma bem concisa.

11. Construa gramáticas para as seguintes linguagens:
   a) $\{\texttt{0}\}\{\texttt{0}, \texttt{1}\}^*\{\texttt{11}\}$;
   b) $\{\lambda, \texttt{0}\}\{\texttt{11}\}^*\{\lambda, \texttt{0}\}$;
   c) $\{w \in \{\texttt{a}, \texttt{b}\}^* \,|\,$ o número de as em w é par$\}$;
   d) $\{\texttt{a}^n\texttt{b}^n \,|\, n \in \mathbf{N}\}$;
   e) $\{w \in \{\texttt{a}, \texttt{b}\}^* \,|\, w = w^R\}$.

   Para as duas últimas, determine o número de passos para gerar uma palavra de n símbolos.

12. Diga que linguagens são geradas pelas gramáticas:
   a) $G_1 = (\{A\}, \{\texttt{0}, \texttt{1}\}, R_1, A)$, sendo R_1 constituído de:
   $$A \to \texttt{0}A \,|\, A\texttt{0} \,|\, \texttt{1}$$
   b) $G_2 = (\{B\}, \{\texttt{0}, \texttt{1}\}, R_2, B)$, sendo R_2 constituído de:
   $$B \to \texttt{0}B\texttt{00} \,|\, \texttt{1}$$
   c) $G_3 = (\{S, A, B\}, \{\texttt{0}, \texttt{1}\}, R_3, S)$, sendo R_3 constituído de:
   $$S \to AA \,|\, B$$
   $$A \to \texttt{0}A \,|\, A\texttt{0} \,|\, \texttt{1}$$
   $$B \to \texttt{0}B\texttt{00} \,|\, \texttt{1}$$

13. Identifique as linguagens geradas pelas gramáticas:

  a) $G_1 = (\{P, X\}, \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}, R_1, P)$.

  R_1: $P \to \mathtt{a}X \mid \mathtt{b}P \mid \lambda$
  $X \to \mathtt{a}P$

  b) $G_2 = (\{P, A\}, \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}, R_2, P)$.

  R_2: $P \to \mathtt{a}P\mathtt{a} \mid A$
  $A \to \mathtt{b}A \mid \mathtt{b}$

  c) $G_3 = (\{A, B\}, \{\mathtt{0}, \mathtt{1}\}, R_3, A)$.

  R_3: $A \to \mathtt{0}A \mid B$
  $B \to B\mathtt{1} \mid \mathtt{01}$

  d) $G_4 = (\{P, X\}, \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}, R_4, P)$.

  R_4: $P \to \mathtt{a}P \mid X\mathtt{b} \mid \lambda$
  $X \to \mathtt{a}P$

  e) $G_5 = (\{P, X\}, \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}, R_5, P)$.

  R_5: $P \to \mathtt{aa}P \mid X\mathtt{b} \mid \lambda$
  $X \to \mathtt{a}P$

14. Sejam os PDs:

  a) determinar se um número natural n, para $1 \leq n \leq 200$, é um número primo;
  b) dada uma equação do segundo grau de coeficientes a, b e c, determinar se suas raízes são ambas reais, se cada um dos coeficientes é um número natural entre 10 e 20 (exclusive);
  c) dada uma equação do segundo grau de coeficientes a, b e c, determinar se suas raízes são ambas reais, se seus coeficientes podem ser números reais quaisquer;
  d) dada uma fórmula da lógica de predicados, determinar se ela é válida;
  e) dados dois conjuntos finitos, determinar se eles são disjuntos;
  f) determinar se uma árvore A tem altura menor ou igual a n;
  g) determinar se uma palavra w é palíndromo, se $w \in \{\mathtt{0}, \mathtt{1}\}^*$.

  Dizer quantos parâmetros e quantas instâncias tem cada um.

15. Diz-se que um PD P é *redutível* a um PD Q, se existe um algoritmo $\mathcal{R}$ que, recebendo x como entrada, produz um resultado y tal que a resposta a P para a entrada x é idêntica ou complementar[1] à resposta a Q para a entrada y, qualquer que seja a entrada x. Diz-se, com isso, que o algoritmo $\mathcal{R}$ pode ser usado para *reduzir* o problema P ao problema Q.

  Seja D um PD decidível e I um PD indecidível. O que se pode dizer de um PD X, com relação à sua decidibilidade, se:

  a) D é redutível a X?
  b) X é redutível a D?
  c) I é redutível a X?
  d) X é redutível a I?

[1] A resposta complementar a *sim* é *não*, e a *não* é *sim*.

16. Faça um diagrama de estados, similar àquele do quebra-cabeça LCR, para o problema dos missionários e canibais:

    > Três missionários e três canibais devem atravessar um rio. Para isso, dispõem de uma canoa que pode transportar no máximo duas pessoas de cada vez. Durante a travessia, se o número de canibais for maior que o de missionários em qualquer uma das margens, os canibais comem os missionários. Determinar um plano para travessia em que nenhum missionário seja devorado.

17. Faça um diagrama de estados, usando a ideia apresentada na Seção 2.1.2, para uma máquina que determine se uma sequência ternária (com dígitos 0, 1 e 2) é divisível por 4.

18. Construa um diagrama de estados para uma máquina de Mealy que, dada uma sequência de moedas de 25 e 50 centavos e de 1 real, forneça uma lata de refrigerante quando a sequência totalizar 1 real ou mais. A cada moeda inserida deverá corresponder uma de duas saídas: $\mathtt{0}$, se uma lata não pode ser (ainda) liberada, ou $\mathtt{1}$, se uma lata deve ser liberada. Um exemplo de entrada e saída correspondente:

entrada:	50	25	50	100	25	50	25	$\cdots$
saída:	0	0	1	1	0	1	0	$\cdots$

19. Construa AFDs que reconheçam:

    a) $\{\lambda, \mathtt{0}\}^2$;

    b) $\{\lambda, \mathtt{0}, \mathtt{1}\}^2\{\mathtt{1}\}^*$;

    c) $\{011, 1\}^*$.

    d) $\{\mathtt{0}, \mathtt{1}\}^* - \{\mathtt{0}, \mathtt{1}, \mathtt{00}, \mathtt{11}\}$;

    e) $\{\mathtt{01}\}^*\{\mathtt{10}\}^*$;

    f) $\{00, 1\}^*\{0, 11\}^*$.

20. Faça AFDs que reconheçam as linguagens:

    a) $\{\mathtt{a}^m\mathtt{b}^n \,|\, m + n \geq 2\}$;

    b) $\{\mathtt{a}^m\mathtt{b}^n \,|\, m + n \text{ é par}\}$;

    c) $\{\mathtt{a}^m\mathtt{b}^n \,|\, m + n \bmod 3 = 0\}$;

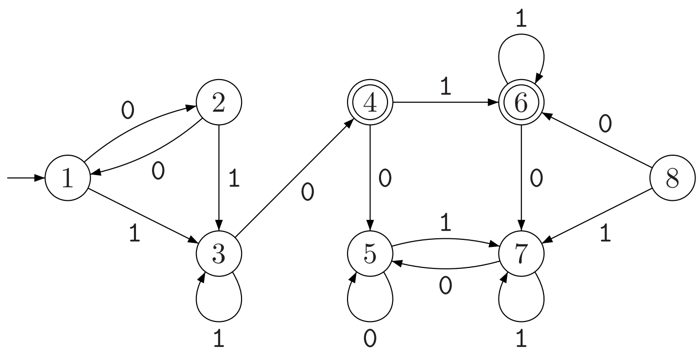
    d) $\{\mathtt{a}^n\mathtt{b}^n \,|\, n \leq 3\}$.

    e) $\{\mathtt{a}^m\mathtt{b}^n \,|\, m \leq 2 \text{ e } n \geq m + 2\}$.

21. Prove que $\hat{\delta}(e, xy) = \hat{\delta}(\hat{\delta}(e, x), y)$, em que δ é a função de transição de um AFD, e é um estado e x e y são palavras.

22. Dado um AFD M e um conjunto X de estados de erro em M, apresente em detalhes como seria um AFD M', equivalente a M, obtido pela substituição de todos os estados de X em M por um único estado de erro.

23. Seja o AFD com o seguinte diagrama de estados:



a) Obtenha o diagrama de estados de um AFD mínimo equivalente.

b) Que linguagem é reconhecida pelo AFD em questão?

24. Utilizando produto de autômatos, determine AFDs que reconheçam

    a) a união e

    b) a interseção

    das linguagens $\{w \in \{\mathtt{0},\mathtt{1}\}^* \mid n_{\mathtt{1}}(w) \bmod 3 \neq 0\}$ e $\{w \in \{\mathtt{0},\mathtt{1}\}^* \mid |w| \bmod 3 = 0\}$.

25. Sejam

    - $L_1 = \{\mathtt{0},\mathtt{1}\}^*\{\mathtt{1}\}\{\mathtt{0},\mathtt{1}\}^*$;
    - $L_2 = \{w \in \{\mathtt{0},\mathtt{1}\}^* \mid w$ não contém $\mathtt{00}\}$.

    Construa autômatos finitos determinísticos que reconheçam:

    a) L_1.

    b) L_2.

    c) $L_1 - L_2$. Para isto, faça o produto dos autômatos que reconhecem L_1 e $\overline{L_2}$.

26. Sim ou não? Por quê?

    a) Existe linguagem infinita que pode ser reconhecida por um AFD de apenas um estado.

    b) Existe linguagem finita que pode ser reconhecida por um AFD de, no mínimo, um trilhão de estados.

    c) Se uma linguagem pode ser reconhecida por um AFD, qualquer subconjunto dela também pode.

    d) Se uma linguagem não pode ser reconhecida por um AFD e ela é subconjunto de L, então L também não pode ser reconhecida por um AFD.

    e) Se um AFD M reconhece uma palavra cujo número símbolos é igual ao número de estados de M, então $L(M)$ é infinita.

    f) Supondo que existam AFDs que reconheçam as linguagens A, B e C, então existirá AFD que reconhece $A - (B - C)$.

27. Construa AFNs para as seguintes linguagens sobre $\{\mathtt{a},\mathtt{b},\mathtt{c}\}$:

    a) o conjunto das palavras com, no mínimo, três ocorrências de `abc`;

    b) o conjunto das palavras com, no mínimo, três ocorrências de `a`s ou três ocorrências de `b`s ou três de `c`s;

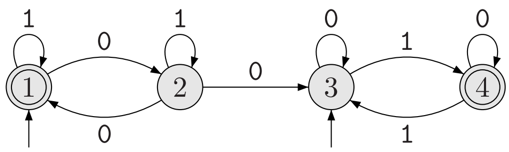


Figura 1: AFN para Exercícios 28 e 29.

c) o conjunto das palavras com sufixo `abc` ou `bca`;

d) o conjunto das palavras em que existem duas ocorrências de `abc` com um número ímpar de símbolos entre elas;

e) o conjunto das palavras em que o último símbolo seja idêntico ao primeiro;

f) o conjunto das palavras em que o último símbolo seja diferente do primeiro;

g) o conjunto das palavras em que o último símbolo tenha ocorrido antes;

h) o conjunto das palavras em que o último símbolo tenha ocorrido antes no máximo uma vez;

i) o conjunto das palavras em que o último símbolo não tenha ocorrido antes;

j) o conjunto das palavras com um único `a` ou um único `b` ou um único `c`.

28. Mostre que para todo AFN existe um AFN equivalente com um único estado inicial, para isto indicando um mínimo de alterações no AFN original. Exemplifique com o AFN da Figura 1.

29. Mostre que para todo AFN existe um AFN equivalente com um único estado final. Exemplifique com o AFN da Figura 1.

30. Mostre que existe linguagem regular que não pode ser reconhecida por AFN que tenha apenas um estado inicial **e** um estado final.

31. Mostre que toda linguagem regular que não contenha a palavra λ pode ser reconhecida por AFN que tenha apenas um estado inicial **e** um estado final.

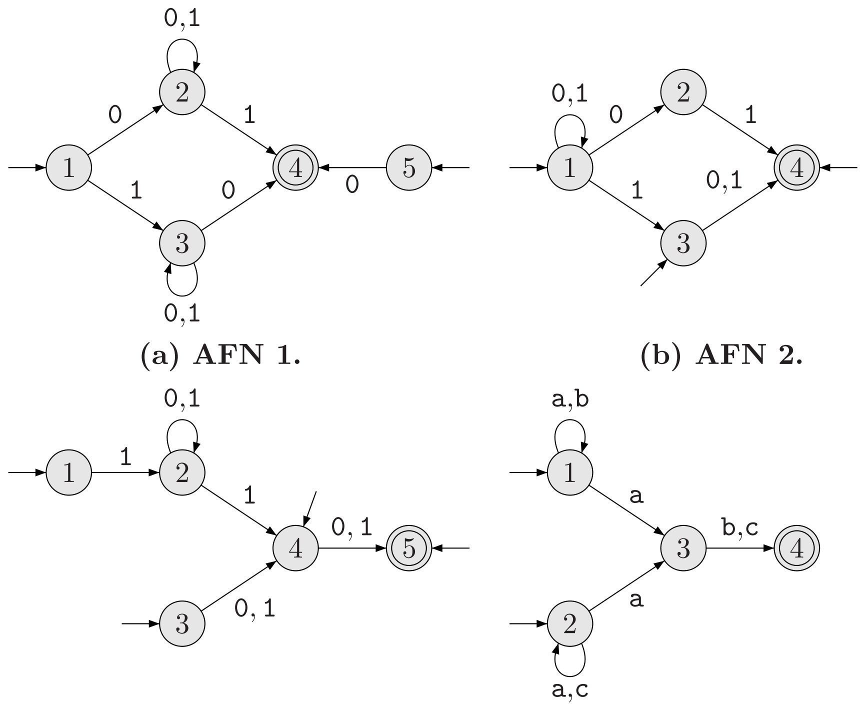
32. Sejam os AFNs com os diagramas de estados da Figura 2. Obtenha AFDs equivalentes aos AFNs utilizando o método de construção de subconjuntos.

33. Construa um AFN de 3 estados que reconheça $\{\mathtt{a}\}^*\{\mathtt{b}\} \cup \{\mathtt{b}\}^*\{\mathtt{a}\}$. Em seguida, obtenha um AFD equivalente pelo método da construção de subconjuntos.

34. Seja o AFNλ $M = (\{0, 1, 2\}, \{\mathtt{a}, \mathtt{b}, \mathtt{c}\}, \delta, \{0\}, \{2\})$, sendo δ dada por:

δ	`a`	`b`	`c`	λ
0	$\{0\}$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{1\}$
1	$\emptyset$	$\{1\}$	$\emptyset$	$\{2\}$
2	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{2\}$	$\emptyset$

a) Determine $f\lambda(e)$ para $e = 0, 1, 2$.



(a) **AFN 1.** (b) **AFN 2.**

(c) **AFN 3.** (d) **AFN 4.**

Figura 2: AFNs para Exercício 32.

b) Determine um AFN M' equivalente a M, usando a técnica para eliminação de transições λ.

c) Determine um AFD equivalente a M', usando o método de construção de subconjuntos.

35. Sejam $L_1 = \{1, 01\}^+$ e $L_2 = \{0, 10\}^*$.

a) Construa AFNs (AFDs sem estados de erro) que reconheçam L_1 e L_2.

b) Obtenha um AFNλ que reconheça L_1L_2 usando transição λ, como exemplificado no Exemplo 37 da Seção 2.3.

c) Obtenha um AFN equivalente usando a técnica para eliminação de transições λ.

d) Obtenha um AFD equivalente pelo método da construção de subconjuntos.

36. Espelhando-se nos Exemplos 37 a 40 da Seção 2.3 construa, a partir de AFNλs, AFDs que reconheçam:

a) $\{\mathtt{a}\}\{\lambda, \mathtt{a}, \mathtt{b}\}^2\{\mathtt{b}\}$;

b) $\{\mathtt{a}\}^*(\{\mathtt{b}\}^* \cup \{\mathtt{c}\}^*)\{\mathtt{a}\}^*$;

c) $\{\mathtt{aa}\}^*\{\mathtt{bb}\}^*\{\mathtt{cc}\}^*$.