Departamento de Ciência da Computação — ICEx/UFMG
Teoria de Linguagens — $2^{\underline{o}}$ semestre de 2017
Professor: Newton José Vieira
Segunda Lista de Exercícios/Solução do professor Data de entrega: 31/10/2017 Valor: 10 pontos

1. Usando o teorema da invariância à direita, mostre que os seguintes conjuntos não são linguagens regulares:

   a) $\{x1^n \mid x \in \{0,1\}^* \text{ e } |x| \leq n\}$;
   b) $\{0^m 1^n \mid m > 2n\}$;
   c) $\{w \in \{0,1\}^* \mid n_0(w) = n_1(w)\}$;
   d) $\{xx \mid x \in \{0,1\}^*\}$.

   Solução:

   a) Seja $L = \{x1^n \mid x \in \{0,1\}^* |x| \leq n\}$. Seja $R = \{0\}^*$ e sejam $0^i, 0^j \in R$, $i < j$, palavras arbitrárias de R. Segue-se que $0^i 1^i \in L$ e $0^j 1^i \notin L$. Portanto, L não é regular.

   b) Seja $L = \{0^m 1^n \mid m > 2n\}$. Seja $R = \{0\}^*$. Sejam $0^i, 0^j \in R$, $i < j$, duas palavras arbitrárias de R. Tem-se que $0^i 0^{j+1} 1^j = 0^{i+j+1} 1^j =\notin L$, pois se $i < j$ então $i+j+1 \leq 2j$, e $0^j 0^{j+1} 1^j = 0^{2j+1} 1^j \in L$. Portanto, L não é regular.

   c) Sejam $L = \{w \in \{0,1\}\}^* \mid n_0(w) = n_1(w)\}$ e $R = \{0\}^*$. Sejam as palavras arbitrárias de R, 0^i e 0^j, $i \neq j$. Segue-se que $0^i 1^i \in L$ e $0^j 1^i \notin L$. Portanto, L não é regular.

   d) Seja $L = \{xx \mid x \in \{0,1\}^*\}$. Seja $R = \{0\}^*$. Sejam $0^i, 0^j \in R$, $i \neq j$, duas palavras arbitrárias de R. Tem-se que $0^i 1 0^i 1 \in L$ e $0^j 1 0^i 1 \notin L$. Logo, L não é regular.

2. Prove que os seguintes conjuntos não são linguagens regulares, utilizando o LB:

   a) $\{0^m 1^n \mid m < n\}$;
   b) $\{x1^n \mid x \in \{0,1\}^* \text{ e } |x| \leq n\}$;
   c) $\{0^n 1^{2^n} \mid n \geq 0\}$;
   d) $\{x1y \mid x, y \in \{0,1\}^* \text{ e } |x| = |y|\}$.

   Solução:

   a) Seja $L = \{0^m 1^n \mid m < n\}$. Suponha que L seja regular. Sejam k a constante do LB e $z = 0^k 1^{k+1}$. Sejam, de acordo com o LB, u, v e w tais que $z = uvw$, $v \neq \lambda$, $|uv| \leq k$ e $uv^i w \in L$ para todo $i \geq 0$. Mas, sendo $z = uvw$ e $|uv| \leq k$, v só contém 0s e, portanto, $uv^2 w = 0^{k+|v|} 1^{k+1}$. E sendo $v \neq \lambda$, $uv^2 w \notin L$. Isto contradiz o LB. Logo, L não é regular.

   b) Seja $L = \{x1^n \mid x \in \{0,1\}^* \text{ e } |x| \leq n\}$. Suponha que L seja regular. Sejam k a constante do LB e $z = 0^k 1^k$. Sejam, de acordo com o LB, u, v e w tais que $z = uvw$, $v \neq \lambda$, $|uv| \leq k$ e $uv^i w \in L$ para todo $i \geq 0$. Mas, sendo $z = uvw$ e $|uv| \leq k$, v só contém 0s e, portanto, $uv^2 w = 0^{k+|v|} 1^k$. E sendo $v \neq \lambda$, $k + |v| > k$ e, assim, $uv^2 w \notin L$, o que contradiz o LB. Logo, L não é regular.

c) Seja $L = \{0^n 1^{2^n} \mid n \geq 0\}$. Suponha que L seja regular. Sejam k a constante do LB e $z = 0^k 1^{2^k}$. Sejam, de acordo com o LB, u, v e w tais que $z = uvw$, $v \neq \lambda$, $|uv| \leq k$ e $uv^i w \in L$ p ara todo $i \geq 0$. Mas, sendo $z = uvw$ e $|uv| \leq k$, v só contém 0s e, portanto, $uv^2 w = 0^{k+|v|} 1^{2^k}$. E sendo $v \neq \lambda$, $uv^2 w \notin L$. Isto contradiz o LB. Logo, L não é regular.

d) Seja $L = \{x1y \mid x, y \in \{0,1\}^* \text{ e } |x| = |y|\}$. Seja a constante k do LB, e seja $z = 0^k 10^k$. O lema diz existem u, v e w tais $z = uvw$, $|u| > 0$, $|uv| \leq k$ e $uv^i w \in L$ para todo $i \geq 0$. Como $z = 0^k 10^k$ e $|uv| \leq k$, $uv^2 w = 0^{k+|v|} 10^k$; como $|v| > 0$, segue-se que $uv^2 w \notin L$, contrariando o lema. Logo, L não é regular.

3. Prove que os seguintes conjuntos não são linguagens regulares, utilizando propriedades de fechamento:

a) $\{0^m 1^n \mid m < n\} \cup \{0^m 1^n \mid m > n\}$;

b) $\{x1y \in \{0,1\}^* \mid n_0(x) = n_1(y)\}$;

c) $\{x1^n \mid x \in \{0,1\}^* \text{ e } |x| \leq n\}$;

d) $\{w \in \{0,1\}^* \mid n_0(w) = n_1(w)\}$;

e) $\{w \in \{0,1\}^* | n_0(w) = n_1(w)\} - \{0^n 1^n | n \geq 0\}$;

f) $\{w \in \{0,1,2\}^* \mid n_0(w) \neq n_1(w)\}$.

Solução:

a) Seja $L = \{0^m 1^n \mid m < n\} \cup \{0^m 1^n \mid m > n\}$. Suponha que L é regular. Então $\overline{L} \cap \{0\}^*\{1\}^*$ também é regular, pois as linguagens regulares são fechadas sob complementação e sob interseção. Mas, $\overline{L} \cap \{0\}^*\{1\}^* = \{0^n 1^n \mid n \geq 0\}$, que não é regular. Contradição! Logo, L não é regular.

b) Suponha que $L = \{x1y \in \{0,1\}^* \mid n_0(x) = n_1(y)\}$ é regular. Como as linguagens regulares são fechadas sob interseção e $\{0\}^*\{1\}^*$ é regular, então $L \cap \{0\}^*\{1\}^*$ deve ser regular. Mas $L \cap \{0\}^*\{1\}^* = \{0^n 1^k \mid n < k\}$, que não é regular. Logo, L não é regular.

c) Seja $L = \{x1^n \mid x \in \{0,1\}^* \text{ e } |x| \leq n\}$. Suponha que L é regular. Então $L \cap \{0\}^*\{1\}^*$ também é regular, pois as linguagens regulares são fechadas sob interseção. Mas, $L \cap \{0\}^*\{1\}^* = \{0^m 1^n \mid m \leq n\}$, que não é regular. Contradição! Logo, L não é regular.

d) Seja $L = \{w \in \{0,1\}^* \mid n_0(w) = n_1(w)\}$. Então, como as linguagens regulares são fechadas sob interseção, $L \cap \{0\}^*\{1\}^*$ deve ser regular. Mas, $L \cap \{0\}^*\{1\}^* = \{0^n 1^n \mid n \geq 0\}$, linguagem não regular. Contradição! Logo, L não é regular.

e) Seja $L = \{w \in \{0,1\}^* \mid n_0(w) = n_1(w)\} - \{0^n 1^n \mid n \geq 0\}$. Se L fosse regular, então $L \cap \{1\}^*\{0\}^*$ também seria, pois as linguagens regulares são fechadas sob interseção. Mas, $L \cap \{1\}^*\{0\}^* = \{1^n 0^n \mid n \geq 1\}$, que não é regular. Portanto, L não é regular.

f) Seja $L = \{w \in \{0,1,2\}^* \mid n_0(w) \neq n_1(w)\}$. Se L fosse regular, $\overline{L}$ seria regular e $\overline{L} \cap \{0\}^*\{1\}^*$ também seria. Mas, $\overline{L} \cap \{0\}^*\{1\}^* = \{0^n 1^n \mid n \geq 0\}$, que não é regular. Portanto, L não é regular.

4. Sejam $L_1 = \{0^n \mid n \geq 1000\}$ (regular), $L_2 = \{0^n 1^k \mid n \geq k\}$ (não regular) e $L_3 = \{0^n \mid n \text{ é número primo}\}$ (não regular). Para cada linguagem a seguir, mostre que ela é regular ou que não é:

a) $L_2 - L_1$;

b) $L_3 - L_1$;

c) $L_1 \cap L_2$;

d) $L_1 \cap L_3$.

Solução:

a) Como $L_1 \subset L_2$, $(L_2 - L_1) \cup L_1 = L_2$. Como as linguages regulares são fechadas sob união, se $L_2 - L_1$ fosse regular, como L_1 é regular, então L_2 teria que ser regular. Mas L_2 não é regular. Logo, $L_2 - L_1$ **não é regular**.

b) $L_3 - L_1 = \{\mathtt{0}^n \mid n \text{ é primo e } n < 1000\}$. Tal linguagem é finita. Logo **é regular**.

c) $L_1 \cap L_2 = L_1$, que **é regular**.

d) Como $L_3 - L_1$ é regular e as linguagens regulares são fechadas sob união, se $L_1 \cap L_3$ fosse regular, então $(L_1 \cap L_3) \cup (L_3 - L_1) = L_3$ seria regular, o que não é o caso. Logo, $L_1 \cap L_3$ **não é regular**.

5. Sejam $L_1 = \{0^n \mid n \text{ é um número primo}\}$ e $L_2 = \{\mathtt{0}^k\}\{\mathtt{0}\}^*$, em que k é uma constante. Para cada linguagem a seguir, mostre que ela é regular ou que não é:

a) $L_1 - L_2$;

b) $L_1 \cap L_2$;

c) $L_1 \cup L_2$.

Solução: Sabe-se que L_1 não é regular e L_2 é regular.

a) $L_3 = \{0^n \mid n < k \text{ e } n \text{ é um número primo}\}$. Como este conjunto é *finito*, é regular.

b) Se $L_4 = \{0^n \mid n \geq k \text{ e } n \text{ é um número primo}\}$ fosse regular, $L_4 \cup L_3$ também seria, pois as linguagens regulares são fechadas sob união. Mas, $L_4 \cup L_3 = L_1$, que não é regular.

c) Como $L_1 \cup L_2 = L_3 \cup L_2$, L_3 e L_2 são regulares, segue-se por fechamento sob união que $L_1 \cup L_2$ é regular.

6. Seja L uma linguagem regular sobre um alfabeto Σ_1. Prove que o conjunto de todas as palavras sobre Σ_2 (que pode ser igual ou não a Σ_1) que têm como sufixo alguma palavra de L é linguagem regular.

Solução: O conjunto das palavras sobre Σ_2 que têm como sufixo alguma palavra de L é $\Sigma_2^*(L \cap \Sigma_2^*)$. Esta é regular, visto que L e Σ_2^* são regulares e as linguagens regulares são fechadas sob interseção e concatenação.

7. Encontre expressões regulares que denotem os conjuntos:

a) $\{w \in \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}^* \mid w \text{ contém um, dois ou três } \mathtt{bs}\}$;

b) $\{w \in \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}^* \mid w \text{ começa com } \mathtt{a} \text{ e tem tamanho par}\}$;

c) $\{w \in \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}^* \mid w \text{ tem número par de } \mathtt{as}\}$;

d) $\{w \in \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}^* \mid w \text{ contém } \mathtt{bb}\}$;

e) $\{w \in \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}^* \mid w \text{ contém exatamente um } \mathtt{bb}\}$;

f) $\{w \in \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}^* \mid w \text{ começa com } \mathtt{a}, \text{ tem pelo menos um } \mathtt{b} \text{ e termina com } \mathtt{a}\}$.

Solução:

a) $a^*ba^*(\lambda + ba^*(\lambda + ba^*))$.

b) $a(a + b)((a + b)(a + b))^*$.

c) $b^*(ab^*ab^*)^*$.

d) $(a+b)^*bb(a+b)^*$.

e) $(a+ba)^*bb(ab+a)^*$.

f) $aa^*b(a+b)^*a$.

8. Construa um AFD para cada uma das linguagens denotadas pelas ERs:

   a) $(ab)^*ac$;

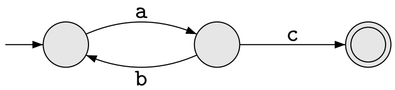
   b) $(ab)^*(ba)^*$;

   c) $(ab^*a)^*(ba^*b)^*$;

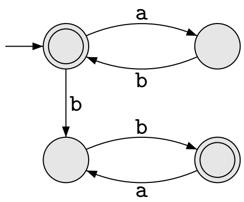
   d) $(aa+b)^*baab$.

   Solução:

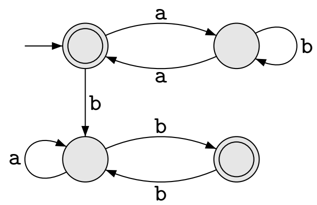
   a) AFD para $(ab)^*ac$:



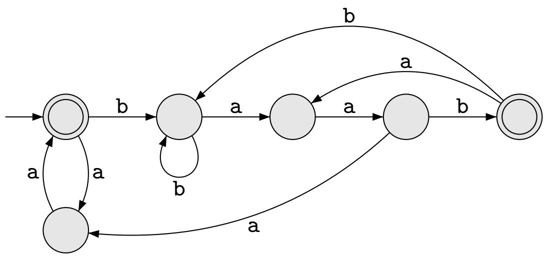
   b) AFD para $(ab)^*(ba)^*$:



   c) AFD para $(ab^*a)^*(ba^*b)^*$:



   d) AFD para $(aa+b)^*baab$:



9. Construa ERs que denotem as linguagens reconhecidas pelos AFs mostrados na Figura 1, utilizando o método descrito no livro.

   Solução:

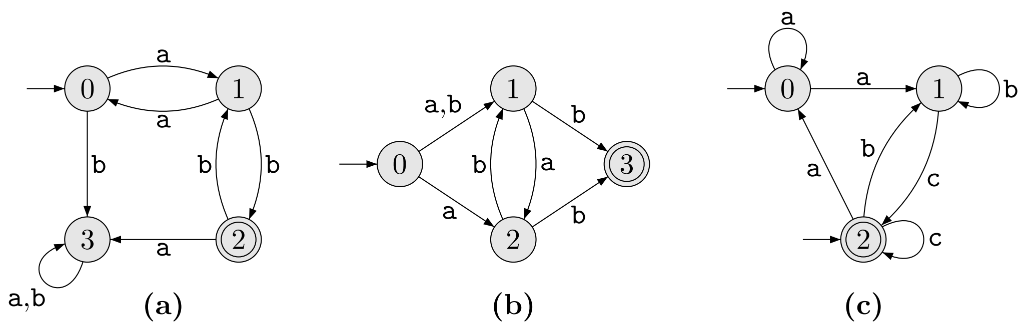
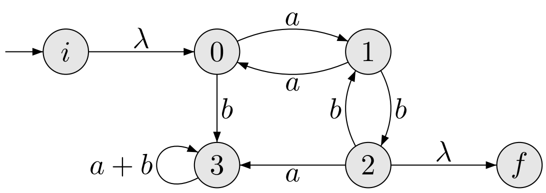
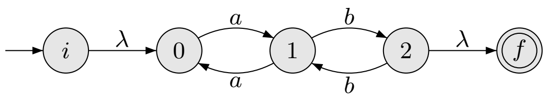


Figura 1: AFs do Exercício 9.

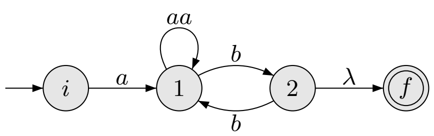
a) Diagrama ER inicial:



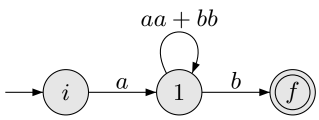
Eliminando-se o estado 3, já que $\#(3) = 0$, obtém-se o diagrama ER:



Eliminando-se o estado 0 deste último, obtém-se o diagrama ER:



Eliminando-se o estado 2:



Eliminando-se o estado 1, obtém-se a ER: $a(aa + bb)^*b$.

b) Eliminando-se 2 e depois 1 obtém-se: $ab + (a + b + ab)(ab)^*(b + ab)$.

c) Acrescentando-se um estado i com transições sob λ para 0 e 2, e eliminando-se 1 e 0, nesta ordem, obtém-se: $(\lambda + a^*ab^*c)(c + bb^*c + aa^*ab^*c)^*$.

10. Obtenha GRs para as seguintes linguagens sobre {`0`,`1`}:

a) $\emptyset$;

b) $\{\lambda\}$;

c) o conjunto das palavras com tamanho múltiplo de 3;

d) o conjunto das palavras com um número par de `0`s e um número par de `1`s;

e) o conjunto das palavras em que cada `0` é seguido imediatamente de, no mínimo, dois `1`s;

f) o conjunto das palavras em que cada `0` ocorre entre dois `1`s;

g) o conjunto das palavras em que o antepenúltimo símbolo é $\mathtt{1}$;

h) o conjunto das palavras que não contêm $\mathtt{0}$s consecutivos nem $\mathtt{1}$s consecutivos.

Solução:

a) $(\{P\}, \{\mathtt{0}, \mathtt{1}\}, \{\}, P)$.

b) $(\{P\}, \{\mathtt{0}, \mathtt{1}\}, \{P \to \lambda\}, P)$.

c)
$$\begin{aligned} P &\to \mathtt{0}A \,|\, \mathtt{1}A \,|\, \lambda \\ A &\to \mathtt{0}B \,|\, \mathtt{1}B \\ B &\to \mathtt{0}P \,|\, \mathtt{1}P \end{aligned}$$

d)
$$\begin{aligned} pp &\to \mathtt{0}\,ip \,|\, \mathtt{1}\,pi \,|\, \lambda \\ ip &\to \mathtt{0}\,pp \,|\, \mathtt{1}\,ii \\ pi &\to \mathtt{0}\,ii \,|\, \mathtt{1}\,pp \\ ii &\to \mathtt{0}\,pi \,|\, \mathtt{1}\,ip \end{aligned}$$

e)
$$\begin{aligned} P &\to \mathtt{0}A \,|\, \mathtt{1}P \,|\, \lambda \\ A &\to \mathtt{1}B \\ B &\to \mathtt{1}P \end{aligned}$$

f)
$$\begin{aligned} P &\to \mathtt{1}A \,|\, \lambda \\ A &\to \mathtt{1}A \,|\, \mathtt{0}B \,|\, \lambda \\ B &\to \mathtt{1}A \end{aligned}$$

g)
$$\begin{aligned} P &\to \mathtt{0}P \,|\, \mathtt{1}P \,|\, \mathtt{1}A \\ A &\to \mathtt{0}B \,|\, \mathtt{1}B \\ B &\to \mathtt{0} \,|\, \mathtt{1} \end{aligned}$$

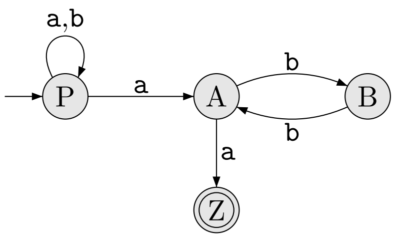
h)
$$\begin{aligned} P &\to \mathtt{0}A \,|\, \mathtt{1}B \,|\, \lambda \\ A &\to \mathtt{1}B \,|\, \lambda \\ B &\to \mathtt{0}A \,|\, \lambda \end{aligned}$$

11. Seja a GR $G = (\{P, A, B\}, \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}, R, P)$, em que R consta das regras:

$$\begin{aligned} P &\to \mathtt{a}P \,|\, \mathtt{b}P \,|\, \mathtt{a}A \\ A &\to \mathtt{a} \,|\, \mathtt{b}B \\ B &\to \mathtt{b}A \end{aligned}$$

Construa, a partir de G, um AFN que aceite $L(G)$.

Solução: AFN a partir de GR:



12. Para as seguintes linguagens, construa APD, se possível. Se não for possível, construa APN.

a) $\{(\texttt{01})^n\texttt{1}(\texttt{10})^n \mid n \in \mathbb{N}\}$;

b) $\{(\texttt{01})^n\texttt{0}(\texttt{10})^n \mid n \in \mathbb{N}\}$;

c) $\{\texttt{a}^n\texttt{b}^{2n}\texttt{c}^{2k} \mid n, k \in \mathbb{N}\}$;

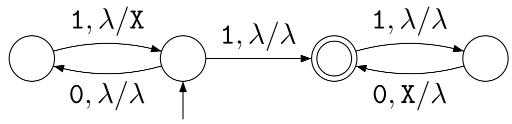
d) $\{\texttt{a}^n\texttt{b}^{2n}\texttt{a}^{2k} \mid n, k \in \mathbb{N}\}$;

e) $\{\texttt{a}^n\texttt{b}^{2n}\texttt{a}^{2k} \mid n \geq 1, k \in \mathbb{N}\}$;

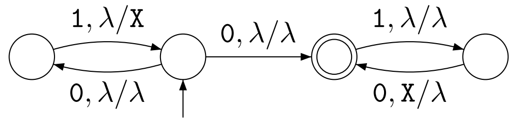
f) $\{\texttt{a}^n(\texttt{abc})^n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

Solução:

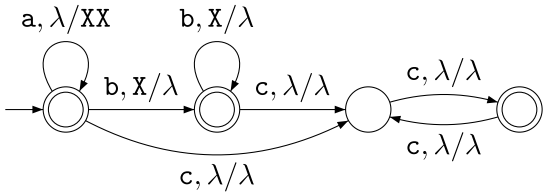
a) APD para $\{(\texttt{01})^n\texttt{1}(\texttt{10})^n \mid n \in \mathbb{N}\}$:



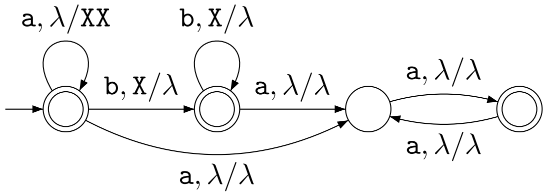
b) APN para $\{(\texttt{01})^n\texttt{0}(\texttt{10})^n \mid n \in \mathbb{N}\}$:



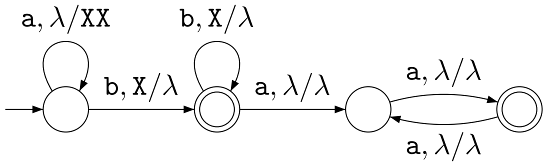
c) APD para $\{\texttt{a}^n\texttt{b}^{2n}\texttt{c}^{2k} \mid n, k \in \mathbb{N}\}$:



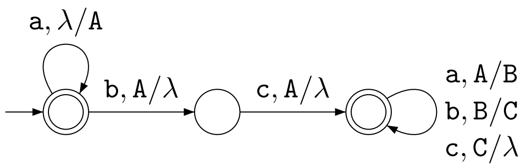
d) APN para $\{\texttt{a}^n\texttt{b}^{2n}\texttt{a}^{2k} \mid n, k \in \mathbb{N}\}$:



e) APD para $\{\texttt{a}^n\texttt{b}^{2n}\texttt{a}^{2k} \mid n \geq 1, k \in \mathbb{N}\}$:



f) APD para $\{\texttt{a}^n(\texttt{abc})^n \mid n \in \mathbb{N}\}$:



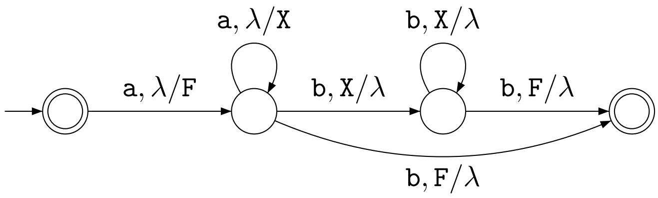
13. Construa APDs que reconheçam $\{\texttt{a}^n\texttt{b}^n \mid n \geq 0\}$:

a) por estado final;

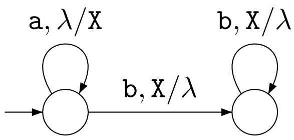
b) por pilha vazia.

Solução:

Reconhecimento por estado final:



Reconhecimento por pilha vazia:



14. Apresente uma GLC que gere $\{\mathtt{a}^n\mathtt{b}^n \mid n \bmod 5 \neq 0\}$ que tenha uma única variável.

Solução:

$$P \to \mathtt{a}^5 P \mathtt{a}^5 \mid \mathtt{ab} \mid \mathtt{a}^2\mathtt{b}^2 \mid \mathtt{a}^3\mathtt{b}^3 \mid \mathtt{a}^4\mathtt{b}^4$$

15. Construa GLCs que gerem:

a) $L_1 = \{\mathtt{a}^m\mathtt{b}^n \mid m \neq n\}$;

b) $L_2 = \{\mathtt{a}^{m+n}\mathtt{b}^m\mathtt{c}^n \mid m \text{ é par e } n \text{ é ímpar}\}$;

c) $L_1L_2 \cup L_1^*$.

Solução:

a) Para $L_1 = \{\mathtt{a}^m\mathtt{b}^n \mid m \neq n\}$:

$$P \to \mathtt{a}P\mathtt{b} \mid A \mid B$$
$$A \to \mathtt{a}A \mid \mathtt{a}$$
$$B \to \mathtt{b}B \mid \mathtt{b}$$

b) Para $L_2 = \{\mathtt{a}^{m+n}\mathtt{b}^m\mathtt{c}^n \mid m \text{ é par e } n \text{ é ímpar}\}$:

$$Q \to \mathtt{aa}P\mathtt{cc} \mid \mathtt{a}X\mathtt{c}$$
$$X \to \mathtt{aa}X\mathtt{bb} \mid \lambda$$

c) Para $L_1L_2 \cup L_1^*$:

$$R \to PQ \mid S$$
$$S \to PS \mid \lambda$$

mais as regras dos dois ítens anteriores.

16. Crie GLCs para:

a) $L_1 = \{\texttt{0}^n\texttt{1}^k \mid 2n \leq k \leq 3n\}$;

b) $L_2 = \{\texttt{a}^n\texttt{b}^k\texttt{c}^m \mid k = 2n + m\}$;

c) $(L_1 \cup L_2)^2$;

d) $(L_1 \cup L_2)^*$.

Solução:

a) Para L_1:

$$X \rightarrow \texttt{0}X\texttt{11} \mid \texttt{0}X\texttt{111} \mid \lambda$$

b) Para L_2:

$$Y \rightarrow AB$$
$$A \rightarrow \texttt{a}A\texttt{bb} \mid \lambda$$
$$B \rightarrow \texttt{b}B\texttt{c} \mid \lambda$$

c) Para $(L_1 \cup L_2)^2$:

$$P \rightarrow ZZ$$
$$Z \rightarrow X \mid Y$$

mais as regras de (a) e (b).

d) Para $(L_1 \cup L_2)^*$:

$$P \rightarrow ZP \mid \lambda$$
$$Z \rightarrow X \mid Y$$

mais as regras de (a) e (b).

17. Seja G a gramática:

$$P \rightarrow AB$$
$$A \rightarrow \texttt{a}A\texttt{b} \mid \texttt{c}$$
$$B \rightarrow \texttt{b}B\texttt{c} \mid \texttt{a}$$

a) Desenvolva uma DME de `acbbbacc`.

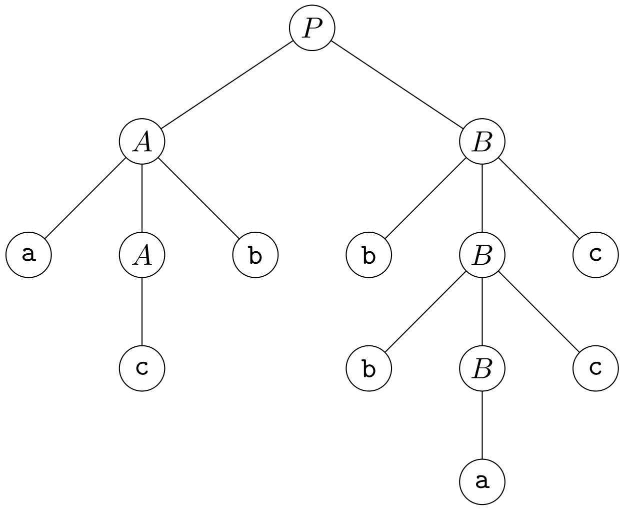
b) Monte a árvore de derivação para a derivação construída em (a).

c) Defina $L(G)$ utilizando notação de conjunto.

Solução:

a) $P \Rightarrow AB \Rightarrow \texttt{a}A\texttt{b}B \Rightarrow \texttt{acb}B \Rightarrow \texttt{acbb}B\texttt{c} \Rightarrow \texttt{acbbb}B\texttt{cc} \Rightarrow \texttt{acbbbacc}$

b) AD:



c) $L(G) = \{\mathtt{a}^n\mathtt{c}\mathtt{b}^n \mid n \geq 0\}\{\mathtt{b}^n\mathtt{ac}^n \mid n \geq 0\}$.

18. Seja a gramática G com as regras:

$$\begin{aligned} P &\to AB \mid \lambda \\ A &\to \mathtt{a}A\mathtt{b} \mid \lambda \\ B &\to \mathtt{b}B\mathtt{a} \mid \lambda \end{aligned}$$

(a) Que linguagem G gera?

(b) Remova a ambiguidade de G modificando-a o mínimo possível.

Solução:

(a) $L(G) = \{\mathtt{a}^m\mathtt{b}^{m+n}\mathtt{a}^n \mid m, n \in \mathbb{N}\}$.

(b) $$\begin{aligned} P &\to AB \\ A &\to \mathtt{a}A\mathtt{b} \mid \lambda \\ B &\to \mathtt{b}B\mathtt{a} \mid \lambda \end{aligned}$$

19. Mostre que a GLC a seguir é ambígua:

$$\begin{aligned} E &\to \mathtt{a}R \mid (E)R \mid \mathtt{a} \mid (E) \\ R &\to +ER \mid *ER \mid \lambda \end{aligned}$$

Solução: Duas DMEs para $\mathtt{a}$:

- $E \Rightarrow \mathtt{a}$
- $E \Rightarrow \mathtt{a}R \Rightarrow \mathtt{a}$

20. Seja a GLC G:

$$\begin{aligned} S &\to \mathtt{0}S\mathtt{0} \mid \mathtt{1}A\mathtt{1} \\ A &\to \mathtt{0}A\mathtt{0} \mid \mathtt{1} \end{aligned}$$

Obtenha GLCs equivalentes:

(a) na forma normal de Chomsky;
(b) na forma normal de Greibach.

Solução:

(a) FNC:

$$\begin{aligned} S &\to ZF \mid UG \\ A &\to ZH \mid \mathtt{1} \\ F &\to SZ \\ G &\to AU \\ H &\to AZ \\ Z &\to \mathtt{0} \\ U &\to \mathtt{1} \end{aligned}$$

(b) FNG:

$$\begin{aligned} S &\to \mathtt{0}SZ \mid \mathtt{1}AU \\ A &\to \mathtt{0}AZ \mid \mathtt{1} \\ Z &\to \mathtt{0} \\ U &\to \mathtt{1} \end{aligned}$$

21. Construa uma gramática sem regras λ equivalente à gramática a seguir e, em seguida, elimine símbolos inúteis:

$$\begin{aligned} S &\to A\mathtt{a}B \mid \mathtt{aa}B \\ A &\to \lambda \\ B &\to \mathtt{bb}A \mid \lambda \end{aligned}$$

Solução:
Variáveis anuláveis: $VA = \{A, B\}$. A GLC resultante é:

$$\begin{aligned} S &\to A\mathtt{a}B \mid A\mathtt{a} \mid \mathtt{a}B \mid \mathtt{a} \mid \mathtt{aa}B \mid \mathtt{aa} \\ B &\to \mathtt{bb}A \mid \mathtt{bb} \end{aligned}$$

Agora A é inútil. Obtém-se:

$$\begin{aligned} S &\to \mathtt{a}B \mid \mathtt{a} \mid \mathtt{aa}B \mid \mathtt{aa} \\ B &\to \mathtt{bb} \end{aligned}$$

22. Obtenha uma GLC na forma normal de Chomsky que gere $L(G) - \{\lambda\}$, se:

(a) G tem as regras $P \to P(P) \mid \lambda$
(b) G tem as regras $P \to ABA$
$A \to \mathtt{a}A \mid \lambda$
$B \to \mathtt{b}B \mid \lambda$

Solução:

(a) Eliminando-se regras λ:

$$P \to P(P) \mid (P) \mid P() \mid ()$$

FNC:

$$
\begin{aligned}
P &\rightarrow PX \mid AY \mid PZ \mid AB\\
X &\rightarrow AY\\
Y &\rightarrow PB\\
Z &\rightarrow AB\\
A &\rightarrow (\\
B &\rightarrow)
\end{aligned}
$$

(b) Eliminando-se regras λ e regras unitárias:

$$
\begin{aligned}
P &\rightarrow ABA \mid AA \mid AB \mid BA \mid \mathtt{a}A \mid \mathtt{a} \mid \mathtt{b}B \mid \mathtt{b}\\
A &\rightarrow \mathtt{a}A \mid \mathtt{a}\\
B &\rightarrow \mathtt{b}B \mid \mathtt{b}
\end{aligned}
$$

FNC:

$$
\begin{aligned}
P &\rightarrow AZ \mid AA \mid AB \mid BA \mid XA \mid \mathtt{a} \mid YB \mid \mathtt{b}\\
A &\rightarrow XA \mid \mathtt{a}\\
B &\rightarrow YB \mid \mathtt{b}\\
X &\rightarrow \mathtt{a}\\
Y &\rightarrow \mathtt{b}\\
Z &\rightarrow BA
\end{aligned}
$$

23. Seja a GLC G:

$$
E \rightarrow E{+}E \mid E{*}E \mid \mathtt{a}
$$

Construa uma gramática na FNG equivalente a G.

Solução: Eliminando-se a recursão direta à esquerda, obtém-se:

$$
\begin{aligned}
E &\rightarrow \mathtt{a}Z \mid \mathtt{a}\\
Z &\rightarrow +EZ \mid *EZ \mid +E \mid *E
\end{aligned}
$$

24. Obtenha uma GLC na FNG que gere $\{\mathtt{a}^m\mathtt{b}^n\mathtt{c}^k \mid n > m + k\}$. Em seguida, construa um AP que reconheça a mesma linguagem, a partir da GLC construída, de acordo com o método visto.

Solução: Para $\{\mathtt{a}^m\mathtt{b}^n\mathtt{c}^k \mid n > m + k\}$:

$$
\begin{aligned}
P &\rightarrow ABC\\
A &\rightarrow \mathtt{a}A\mathtt{b} \mid \lambda\\
B &\rightarrow \mathtt{b}B \mid \mathtt{b}\\
C &\rightarrow \mathtt{b}C\mathtt{c} \mid \lambda
\end{aligned}
$$

Eliminando-se regras λ, obtém-se:

$$
\begin{aligned}
P &\rightarrow ABC \mid AB \mid BC \mid B\\
A &\rightarrow \mathtt{a}A\mathtt{b} \mid \mathtt{ab}\\
B &\rightarrow \mathtt{b}B \mid \mathtt{b}\\
C &\rightarrow \mathtt{b}C\mathtt{c} \mid \mathtt{bc}
\end{aligned}
$$

Eliminando-se regras de cadeias, obtém-se:

$$\begin{aligned}
P &\rightarrow ABC \mid AB \mid BC \mid \mathtt{b}B \mid \mathtt{b}\\
A &\rightarrow \mathtt{a}A\mathtt{b} \mid \mathtt{ab}\\
B &\rightarrow \mathtt{b}B \mid \mathtt{b}\\
C &\rightarrow \mathtt{b}C\mathtt{c} \mid \mathtt{bc}
\end{aligned}$$

Aplicando-se o Teorema 24 nas regras P:

$$\begin{aligned}
P &\rightarrow \mathtt{a}A\mathtt{b}BC \mid \mathtt{ab}BC \mid \mathtt{a}A\mathtt{b}B \mid \mathtt{ab}B \mid \mathtt{b}BC \mid \mathtt{b}C \mid \mathtt{b}B \mid \mathtt{b}\\
A &\rightarrow \mathtt{a}A\mathtt{b} \mid \mathtt{ab}\\
B &\rightarrow \mathtt{b}B \mid \mathtt{b}\\
C &\rightarrow \mathtt{b}C\mathtt{c} \mid \mathtt{bc}
\end{aligned}$$

Trocando-se terminais por variáveis:

$$\begin{aligned}
P &\rightarrow \mathtt{a}AYBC \mid \mathtt{a}YBC \mid \mathtt{a}AYB \mid \mathtt{a}YB \mid \mathtt{b}BC \mid \mathtt{b}C \mid \mathtt{b}B \mid \mathtt{b}\\
A &\rightarrow \mathtt{a}AY \mid \mathtt{a}Y\\
B &\rightarrow \mathtt{b}B \mid \mathtt{b}\\
C &\rightarrow \mathtt{b}CZ \mid \mathtt{b}Z\\
Y &\rightarrow \mathtt{b}\\
Z &\rightarrow \mathtt{c}
\end{aligned}$$

Um APN para a linguagem é $(\{i, f\}, \Sigma, \{P, A, B, C, Y, Z\}, \delta, \{i\}, \{f\})$, em que δ consta das transições:

- $\delta(i, \lambda, \lambda) = \{[f, P]\}$;
- $\delta(f, \mathtt{a}, P) = \{[f, AYBC], [f, YBC], [f, AYB], [f, YB]\}$;
- $\delta(f, \mathtt{b}, P) = \{[f, BC], [f, C], [f, B], [f, \lambda]\}$;
- $\delta(f, \mathtt{a}, A) = \{[f, AY], [f, Y]\}$;
- $\delta(f, \mathtt{b}, B) = \{[f, B], [f, \lambda]\}$;
- $\delta(f, \mathtt{b}, C) = \{[f, CZ], [f, Z]\}$;
- $\delta(f, \mathtt{b}, Y) = \{[f, \lambda]\}$;
- $\delta(f, \mathtt{b}, Z) = \{[f, \lambda]\}$.