Departamento de Ciência da Computação | ICEx/UFMG
Teoria de Linguagens | $2^{\underline{o}}$ semestre de 2017
Professor: Newton José Vieira
Terceira Lista de Exercícios/Solução do professor Data de entrega: 05/12/2017 Valor: 10 pontos

1. Para cada linguagem a seguir, mostre que ela é ou não é LLC:

   a) $\{w \in \{\mathtt{a}, \mathtt{b}, \mathtt{c}\}^* \mid n_{\mathtt{a}}(w) = n_{\mathtt{b}}(w)\}$;
   b) $\{w \in \{\mathtt{a}, \mathtt{b}, \mathtt{c}\}^* \mid n_{\mathtt{a}}(w) \neq n_{\mathtt{b}}(w)\}$;
   c) $\{w \in \{\mathtt{a}, \mathtt{b}, \mathtt{c}\}^* \mid n_{\mathtt{a}}(w) = n_{\mathtt{b}}(w) = n_{\mathtt{c}}(w)\}$;
   d) O complemento de $\{w \in \{\mathtt{a}, \mathtt{b}, \mathtt{c}\}^* \mid n_{\mathtt{a}}(w) = n_{\mathtt{b}}(w) = n_{\mathtt{c}}(w)\}$.

   Solução:

   a) É LLC. Uma GLC para a linguagem:
   $P \to \mathtt{a}P\mathtt{b}P \mid \mathtt{b}P\mathtt{a}P \mid \mathtt{c}P \mid \lambda$

   b) É LLC. Uma GLC para a linguagem:
   $P \to A \mid B$
   $A \to X\mathtt{a}A \mid X\mathtt{a}X$
   $B \to X\mathtt{b}B \mid X\mathtt{b}X$
   $X \to \mathtt{a}X\mathtt{b}X \mid \mathtt{b}X\mathtt{a}X \mid \mathtt{c}X \mid \lambda$

   c) Não é LLC. Seja L a linguagem em questão. Suponha que L seja LLC. Então:

   $$L \cap \{\mathtt{a}\}^*\{\mathtt{b}\}^*\{\mathtt{c}\}^* = \{\mathtt{a}^n\mathtt{b}^n\mathtt{c}^n \mid n \geq 0\}$$

   Como as LLCs são fechadas sob interseçção com linguagens regulares, tem-se uma contradição, visto que $\{\mathtt{a}^n\mathtt{b}^n\mathtt{c}^n \mid n \geq 0\}$ não é LLC. Portanto, L não é LLC.

   d) É LLC. Seja L o complemento de $\{w \in \{\mathtt{a}, \mathtt{b}, \mathtt{c}\}^* \mid n_{\mathtt{a}}(w) = n_{\mathtt{b}}(w) = n_{\mathtt{c}}(w)\}$. Tem-se que $L = L_1 \cup L_2 \cup L_3$, em que $L_1 = \{w \in \{\mathtt{a}, \mathtt{b}, \mathtt{c}\}^* \mid n_{\mathtt{a}}(w) \neq n_{\mathtt{b}}(w)\}$, $L_2 = \{w \in \{\mathtt{a}, \mathtt{b}, \mathtt{c}\}^* \mid n_{\mathtt{a}}(w) \neq n_{\mathtt{c}}(w)\}$ e $L_3 = \{w \in \{\mathtt{a}, \mathtt{b}, \mathtt{c}\}^* \mid n_{\mathtt{b}}(w) \neq n_{\mathtt{c}}(w)\}$. No item (b) mostrou-se que L_1 é LLC. De forma análoga, L_2 e L_3 também são LLCs. Como L_1, L_2 e L_3 são LLCs e as LLCs são fechadas sob união, conclui-se que L é LLC.

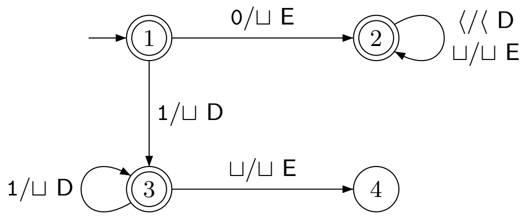
2. Mostre que a classe das linguagens **não** inerentemente ambíguas não é fechada sob as operações de união e interseção.

   Solução: Sejam $L_1 = \{\mathtt{a}^n\mathtt{b}^n \mid n \in \mathbb{N}\}\{\mathtt{c}\}^*$ e $L_2 = \{\mathtt{a}\}^*\{\mathtt{b}^n\mathtt{c}^n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Nenhuma das duas é inerentemente ambígua. Tem-se:

   - $L_1 \cup L_2 = \{\mathtt{a}^m\mathtt{b}^n\mathtt{c}^k \mid m = n \text{ ou } n = k\}$; e
   - $L_1 \cap L_2 = \{\mathtt{a}^n\mathtt{b}^n\mathtt{c}^n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

A primeira é inerentemente ambígua e a segunda não é LLC, como já visto. Segue-se o resultado.

3. Seja a MT $M = (\{1,2,3,4\}, \{\mathtt{0},\mathtt{1}\}, \{\mathtt{0},\mathtt{1},\langle,\sqcup\}, \delta, 1, \{1,2,3\})$ com o diagrama de estados:

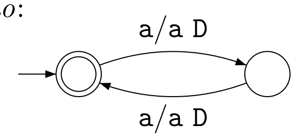


Expresse a linguagem reconhecida por M mediante uma expressão regular.

Solução: $\lambda + 11^*0(0+1)^*$.

4. Projete uma MT de dois estados que reconheça $\{\mathtt{a}^{2n} \mid n \geq 0\}$.

Solução:

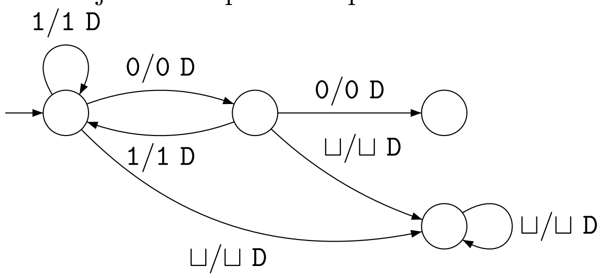


5. Construa MTs que reconheçam por parada as seguintes linguagens de alfabeto $\{\mathtt{0},\mathtt{1}\}$:

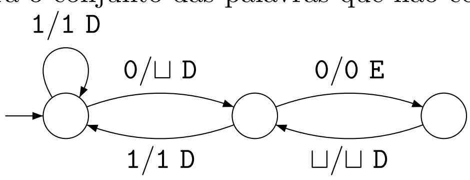
a) o conjunto das palavras que contêm 00;
b) o conjunto das palavras que não contêm 00.

Solução:

(a) MT para o conjunto das palavras que contêm 00:



(b) MT para o conjunto das palavras que não contêm 00.



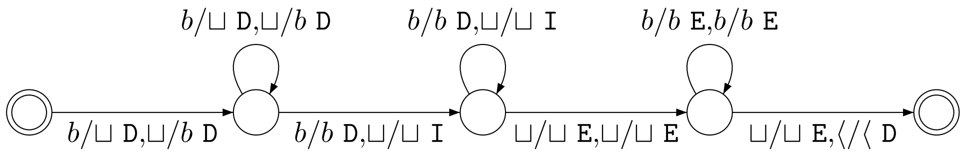
6. Escreva MTs não determinísticas de duas fitas que reconheçam as linguagens:

a) $\{xx \mid x \in \{\texttt{0}, \texttt{1}\}^*\}$;
b) $\{w \in \{\texttt{0}, \texttt{1}\}^* \mid n_0(w) > n_1(w)\}$;
c) $\{xx^R y \mid x, y \in \{\texttt{0}, \texttt{1}\}^* \text{ e } |x| > |y|\}$.

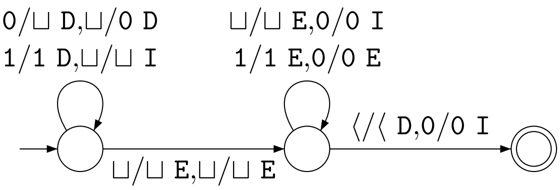
Procure obter MTs com o menor número de transições possível.

Solução:

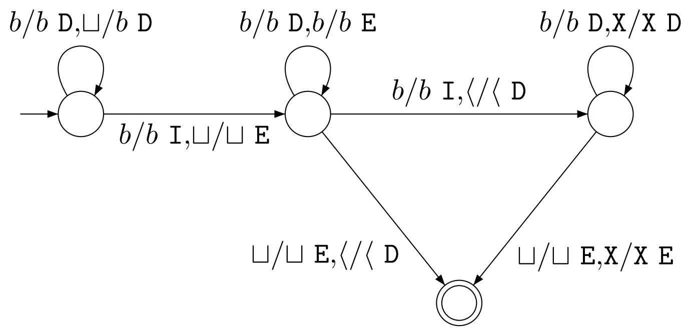
a) Supondo $b \in \{\texttt{0}, \texttt{1}\}$:



b) MT com 2 fitas:



c) Supondo $b \in \{\texttt{0}, \texttt{1}\}$:



7. Seja uma MT $M = (E, \Sigma, \Gamma, \delta, i, \{f\})$ cuja única diferença com relação a uma MT-padrão é que ela tem apenas um estado final. Suponha que a linguagem reconhecida por M seja

$$\{w \in \Sigma^* \mid [i, \langle \underline{w}] \overset{*}{\vdash} [f, x\underline{a}y]\}.$$

Ou seja, para qualquer $w \in \Sigma^*$ M reconhece w se, e somente se, M atinge o estado f ao processar w. Mostre que qualquer linguagem recursivamente enumerável pode ser reconhecida por uma MT desse tipo.

Solução: Uma MT com um único estado final que reconhece $L(M)$ por estado final é $M' = (E \cup \{f\}, \Sigma, \Gamma, \delta', i, \{f\})$, em que $f \notin E$ e δ' é tal que:

- $\delta'(e, a) = \delta(e, a)$ para todo (e, a) tal que $\delta(e, a)$ é definido;

- $\delta'(e,a) = [f, a, \texttt{D}]$ para todo $(e,a) \in F \times \Gamma$ tal que $\delta(e,a)$ é indefinido;
- $\delta'(e,a)$ é indefinido nos casos restantes.

8. Construa gramáticas irrestritas que gerem as linguagens:

   a) $\{\texttt{0}^n\texttt{1}^k\texttt{0}^n\texttt{1}^k \mid n,k \geq 0\}$;
   b) $\{\texttt{a}^m\texttt{b}^n\texttt{c}^k \mid m < n < k\}$.

   Solução:

   a) Gramática para $\{\texttt{0}^n\texttt{1}^k\texttt{0}^n\texttt{1}^k \mid n,k \geq 0\}$:

   $$\begin{aligned} P &\rightarrow AB \\ A &\rightarrow \texttt{0}AZ \mid \lambda \\ B &\rightarrow \texttt{1}B\texttt{1} \mid X \\ Z\texttt{1} &\rightarrow \texttt{1}Z \\ ZX &\rightarrow X\texttt{0} \\ X &\rightarrow \lambda \end{aligned}$$

   b) Gramática para $\{\texttt{a}^m\texttt{b}^n\texttt{c}^k \mid m < n < k\}$:

   $$\begin{aligned} P &\rightarrow \texttt{a}BP\texttt{c} \mid \texttt{b}X\texttt{c} \\ B\texttt{a} &\rightarrow \texttt{a}B \\ B\texttt{b} &\rightarrow \texttt{bb} \\ X &\rightarrow \texttt{b}X\texttt{c} \mid X\texttt{c} \mid \texttt{c} \end{aligned}$$

9. Construa GSCs para:

   a) $\{\texttt{a}^n\texttt{b}^{n+1}\texttt{c}^{n+2} \mid n \geq 0\}$;
   b) $\{\texttt{a}^m\texttt{b}^n\texttt{c}^k \mid m < n < k\}$;
   c) $\{wxw \mid w \in \{\texttt{a},\texttt{b}\}^* \text{ e } x \in \{\texttt{c}\}^+\}$.

   Procure obter GSCs com um número mínimo de regras.

   Solução:

   a) Uma gramática com 4 regras que gera $\{\texttt{a}^n\texttt{b}^{n+1}\texttt{c}^{n+2} \mid n \geq 0\}$:

   $$\begin{aligned} P &\rightarrow \texttt{a}PB\texttt{c} \mid \texttt{bcc} \\ \texttt{c}B &\rightarrow B\texttt{c} \\ \texttt{b}B &\rightarrow \texttt{bb} \end{aligned}$$

   b) Uma gramática com 6 regras que gera $\{\texttt{a}^m\texttt{b}^n\texttt{c}^k \mid m < n < k\}$:

   $$\begin{aligned} P &\rightarrow \texttt{a}PB\texttt{c} \mid PB\texttt{c} \mid P\texttt{c} \mid \texttt{bcc} \\ \texttt{c}B &\rightarrow B\texttt{c} \\ \texttt{b}B &\rightarrow \texttt{bb} \end{aligned}$$

   c) Uma gramática com 11 regras para $\{wxw \mid w \in \{\texttt{a},\texttt{b}\}^* \text{ e } x \in \{\texttt{c}\}^+\}$:

   $$\begin{aligned} P &\rightarrow \texttt{a}PA \mid \texttt{b}PB \mid C \\ C &\rightarrow C\texttt{c} \mid \texttt{c} \\ \texttt{c}A &\rightarrow \texttt{ca} \\ \texttt{c}B &\rightarrow \texttt{cb} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathtt{a}A &\to A\mathtt{a}\\
\mathtt{a}B &\to B\mathtt{a}\\
\mathtt{b}A &\to A\mathtt{b}\\
\mathtt{b}B &\to B\mathtt{b}
\end{aligned}$$

10. Sejam L uma LRE e R uma linguagem recursiva. Mostre:

a) $L - R$ é uma LRE;
b) $L - R$ pode não ser recursiva;
c) $R - L$ pode não ser uma LRE.

Solução:

a) Como as linguagens recursivas são fechadas sob complementação, $\overline{R}$ é recursiva. Assim, $\overline{R}$ é LRE. Como as LREs são fechadas sob interseção, segue-se que $L \cap \overline{R}$ é LRE. Como $L - R = L \cap \overline{R}$, $L - R$ é uma LRE.

b) $\emptyset$ é recursiva. E se L não é recursiva, $L - \emptyset = L$ não é recursiva.

c) Σ^* é recursiva. E $\Sigma^* - L$ pode não ser uma LRE, pois as LREs não são fechadas sob complementação.

11. Seja L uma linguagem *não* recursivamente enumerável. Mostre que:

a) Se F é finita, $L - F$ não é recursivamente enumerável.
b) Se R é regular, $L - R$ pode ser regular ou não.
c) $\overline{L}$ pode ser recursivamente enumerável.

Solução: Seja L uma linguagem *não* recursivamente enumerável.

(a) Suponha que F seja finita. Caso $L - F$ seja recursivamente enumerável, então, como $L \cap F$ é finita, e portanto recursivamente enumerável, segue-se pelo fechamento sob união que $(L - F) \cup (L \cap F)$ é recursivamente enumerável. Mas, $(L - F) \cup (L \cap F) = L$, contradizendo o fato de que L não é recursivamente enumerável. Logo, $L - F$ não pode ser recursivamente enumerável.

(b) $L - \Sigma^* = \emptyset$, que é regular. $L - \emptyset = L$, que não é recursivamente enumerável e, portanto, não é regular.

(c) Se $\overline{L}$ é recursivamente enumerável e não recursiva, então L não é recursivamente enumerável.

12. Seja a seguinte representação de certa gramática G, utilizando-se a codificação concebida em exemplo da Seção 5.2:

$$R\langle G\rangle = \mathtt{1101101011101011100101100110111101101111001100}.$$

Supondo que G tenha os terminais `a`, representado por `111`, e `b`, representado por `1111`, que linguagem é gerada por G?

Solução: $\{\mathtt{a}^n\mathtt{b}^{2k}\mathtt{a}^n \mid n, k \in \mathbb{N}\}$.

13. Exiba as linguagens associadas ao PD "determinar se n é um número par menor do que 10" para as duas representações apresentadas em exemplo da Seção 5.2.

Solução:

a) $\{1^2, 1^4, 1^6, 1^8\}$.

b) $\{0^n 1 0^k \mid n \in \mathbb{N} \text{ e } 0 \leq k \leq 3\}$.

14. Mostre que a linguagem $\{R\langle M\rangle \mid L(M) \neq \emptyset\}$ é LRE.

Solução: A MT universal pode ser alterada para uma MT não determinística que reconhece a linguagem em questão da seguinte forma:

- No passo 1 escreve, *não deterministicamente*, uma palavra na fita 2.
- No passo 3.5.1, a MT entra em estado final.

15. Seja a linguagem $\{R\langle M, w\rangle \mid M$ não para se a entrada for $w\}$. Prove que essa linguagem não é recursivamente enumerável. Observe que essa linguagem é $\overline{L_P}$, excluídas as palavras que não estejam na forma $R\langle M, w\rangle$.

Solução: Seja $X = \{R\langle M, w\rangle \mid M$ não para se a entrada é $w\}$. Como se sabe, a linguagem $L_P = \{R\langle M, w\rangle \mid M$ para se a entrada é $w\}$ é LRE mas não é recursiva. Então, como L_P é LRE, se X fosse LRE, então L_P seria recursiva. Como L_P não é recursiva, segue-se que X não pode ser LRE.

16. Mostre que se o problema da parada fosse decidível, então toda LRE seria recursiva.

Solução: Suponha que o problema da parada seja decidível, ou seja, que haja uma MT P que reconheça $\{R\langle M, w\rangle \mid M$ para se a entrada é $w\}$ e que sempre pare para toda entrada $R\langle M, w\rangle$. Seja M uma MT que reconheça uma LRE L *por parada*. Uma MT M' tal que $L(M') = L(M)$, e que sempre para, pode ser construída, como a seguir, utilizando-se P e M. Seja w a entrada para M'. Então M' se comporta assim:

1. substitui w por $R\langle M, w\rangle$ na fita;
2. se comporta como P sobre esse conteúdo; nas situações em que P reconhece $R\langle M, w\rangle$, M' para em estado final; e nas situações em que P rejeita $R\langle M, w\rangle$, M' para em estado não final.

Com isto, M' reconhece w sse P reconhece $R\langle M, w\rangle$, ou seja, M' reconhece w sse M para se sua entrada é w. Como M reconhece por parada, $L(M') = L(M)$. E como M' sempre para, qualquer que seja w, L é recursiva.

17. Para cada PD a seguir, mostre que o mesmo é indecidível:

a) dados uma MT M, uma palavra w e um estado e de M, determinar se a computação de M para a entrada w atinge o estado e;

b) dados uma MT M e um estado e de M, determinar se a computação de M para a entrada λ atinge o estado e;

c) dada uma MT M, determinar se a computação de M para a entrada λ "volta" ao estado inicial de M;

d) dados uma MT M e um símbolo a de M, determinar se a computação de M para a entrada λ escreve a na fita em algum momento;

e) dados uma MT M e uma expressão regular r, determinar se $L(M) \cap L(r) \neq \emptyset$.

Solução:

(a) O problema da parada pode ser reduzido a este produzindo-se, a partir de $R\langle M, w\rangle$, $R\langle M', w, e\rangle$, em que e é um estado *novo* (não pertencente a M), e M' é como M, a única diferença estando em que, nas situações em que M para, M' faz uma transição para o estado e.

(b) O problema da fita em branco pode ser reduzido a este produzindo-se, a partir de $R\langle M\rangle$, $R\langle M', e\rangle$, em que e é um estado *novo* (não pertencente a M), e M' é como M, a única diferença estando em que, nas situações em que M para, M' faz uma transição para o estado e.

(c) O problema da fita em branco pode ser reduzido a este produzindo-se, a partir de $R\langle M\rangle$, $R\langle M'\rangle$, em que M' se comporta assim:

i. o estado inicial de M' é um estado i diferente de todos os estados de M;
ii. em M' há uma transição de i para o estado inicial de M sob branco;
iii. o resto de M' é como M, só que nas situações em que M para, M' transita para o estado i.

Com isto, M para se a fita está em branco sse M' volta a seu estado inicial se a fita está em branco.

(d) O problema da fita em branco pode ser reduzido a este produzindo-se, a partir de $R\langle M\rangle$, $R\langle M', a\rangle$, em que a é um símbolo de fita diferente de todos os de M e M' se comporta como M, a única diferença estando em que, nas situações em que M para, M' escreve a (e vai para um estado qualquer).

(e) O problema da fita em branco pode ser reduzido a este produzindo-se, a partir de $R\langle M\rangle$, $R\langle M, \lambda\rangle$. Supondo que o critério de reconhecimento é por parada, tem-se que: $\lambda \in L(M)$ (ou seja, M para se a fita está em branco) sse $L(M) \cap L(\lambda) = \{\lambda\} \neq \emptyset$.

18. Mostre que é decidível ou que não é: dada uma MT M, determinar se a computação de M percorre alguma transição da forma $\delta(e, a) = [e, b, d]$ (um laço), quando a fita é iniciada em branco.

Solução: É indecidível. O problema da fita em branco pode ser reduzido a este produzindo-se, a partir da MT M, uma MT M' que é como M, exceto com relação aos seguintes aspectos:

- cada laço $\delta(e, a) = [e, b, d]$ de M é substituído por duas transições $\delta(e, a) = [e', b, \mathtt{I}]$ e $\delta(e', b) = [e, b, d]$, em que e' é um estado novo;
- se em M $\delta(e, a)$ é indefinido, em M' $\delta'(e, a) = [d, \sqcup, \mathtt{I}]$, sendo d um estado novo;
- M' contém uma transição da forma $\delta'(d, \sqcup) = [d, \sqcup, \mathtt{I}]$ (um laço).

Desta forma, M para se iniciada com a fita em branco sse M' percorre um laço se iniciada com a fita em branco.

19. Seja o problema: *dada uma MT M, determinar se $x \in L(M)$, onde x é uma palavra específica.* (Observe que ***o único parâmetro*** desse problema é M.)

a) Pode-se usar o Teorema de Rice para mostrar que esse problema é indecidível? Justifique.
b) Reduza o problema da parada a este.
c) A linguagem $L_x = \{R\langle M\rangle \mid x \in L(M)\}$ é LRE? Justifique.

Solução:

(a) Como $x \in L(M)$ é uma propriedade não trivial de LREs, segue-se que o problema é indecidível pelo Teorema de Rice.

(b) Uma redução mais simples do que a do teorema citado: o problema da fita em branco pode ser reduzido ao problema em questão produzindo-se $R\langle M'\rangle$ a partir de $R\langle M\rangle$, de forma que:

i. M' apaga a palavra de entrada;

ii. M' se comporta como M.

Com isto, $\lambda \in L(M)$ sse $x \in L(M)$ (qualquer que seja x).

(c) L_x é LRE, pois a MT universal, restrita a entradas $R\langle M, x\rangle$ reconhece L_x.

20. Mostre que os seguintes problemas são decidíveis ou não:

a) Dada uma MT M, determinar se ela é a única que reconhece $L(M)$;
b) Dadas uma MT M, determinar se $R\langle M\rangle \in L(M)$;
c) Dadas MTs M_1 e M_2, determinar se $\lambda \in L(M_1) \cup L(M_2)$;
d) Dada uma MT M, determinar se $L(M) = \{R\langle M\rangle\}$;
e) Dada uma MT M, determinar se há alguma palavra com menos de 100 símbolos reconhecida por M;
f) Dada uma MT M, determinar se ela para se recebe como entrada um palíndromo.

Solução:

a) Decidível. A propriedade "M é a única MT que reconhece $L(M)$" é trivial: qualquer linguagem é reconhecível por mais de uma MT.

b) Indecidível. A propriedade $R\langle M\rangle \in L(M)$ não é trivial; logo, pelo teorema de Rice, o problema é indecidível.

c) Indecidível. O problema da fita em branco pode ser reduzido a este produzindo-se, a partir de M o par (M, M), já que $\lambda \in L(M)$ sse $\lambda \in L(M) \cup L(M)$.

d) Indecidível. A propriedade de ser igual a $\{R\langle M\rangle\}$ é não trivial.

e) Indecidível. A propriedade de ter uma palavra com menos de 100 símbolos é não trivial.

f) Indecidível. A propriedade de ter um palíndromo não é trivial.

21. Mostre que é decidível ou que não é:

a) Dadas uma GR R e uma GLC G, determinar se $L(G) \subseteq L(R)$;
b) Dadas uma GR R e uma GLC G, determinar se $L(R) \subseteq L(G)$.

Solução:

a) Decidível. $L(G) \subseteq L(R)$ sse $L(G) \cap \overline{L(R)} = \emptyset$ sse $L(G') = \emptyset$, em que G' é obtida assim:

(a) de R obtém-se um AFD M tal que $L(M) = L(R)$ e de G uma AP P tal que $L(P) = L(G)$;

(b) de M obtém-se um AFD M' tal que $L(M') = \overline{L(M)}$;

(c) de P e M' obtém-se um AP P' tal que $L(P') = L(P) \cap L(M')$;

(d) de P' obtém-se uma GLC G' tal que $L(G') = L(P')$.

Como o problema de determinar se $L(G) = \emptyset$, para GLCs G, é decidível, o problema em questão é decidível.

b) Indecidível. O problema de determinar se $L(G) = \Sigma^*$ pode ser reduzido a este, produzindo-se uma GR que gera Σ^*, pois $L(G) = \Sigma^*$ sse $\Sigma^* \subseteq L(G)$.

22. Mostre que o seguinte problema é ou não decidível: dadas duas GLCs G_1 e G_2, cada uma com uma única variável, determinar se $L(G_1) \cap L(G_2) = \emptyset$.

Solução: O problema é indecidível. O PCP pode ser reduzido a este via a produção de G_x e G_y.

23. Mostre que são indecidíveis os problemas de se determinar, dadas duas GLCs G_1 e G_2, que:

a) $L(G_1) = L(G_2)$;
b) $L(G_1) \subseteq L(G_2)$.

Solução: Como $L(G) = \Sigma^*$ se e somente se $\Sigma^* \subseteq L(G)$ o problema indecidível de determinar se $L(G) = \Sigma^*$ pode ser reduzido a ambos os problemas fazendo-se G_1 uma gramática qualquer que gere Σ^* e $G_2 = G$.