

Apêndice A: Revisão de Matemática Discreta

Newton José Vieira

Departamento de Ciência da Computação
Instituto de Ciências Exatas
Universidade Federal de Minas Gerais

10 de junho de 2017

Sumário

1 Representação

Sumário

- 1 Representação
- 2 Prova de Teoremas

Sumário

- 1 Representação
- 2 Prova de Teoremas
- 3 Conjuntos

Sumário

- 1 Representação
- 2 Prova de Teoremas
- 3 Conjuntos
- 4 Relações

Sumário

- 1 Representação
- 2 Prova de Teoremas
- 3 Conjuntos
- 4 Relações
- 5 Funções

Sumário

- 1 Representação
- 2 Prova de Teoremas
- 3 Conjuntos
- 4 Relações
- 5 Funções
- 6 Conjuntos Enumeráveis

Sumário

- 1 Representação
- 2 Prova de Teoremas
- 3 Conjuntos
- 4 Relações
- 5 Funções
- 6 Conjuntos Enumeráveis
- 7 Definições Recursivas

Sumário

- 1 Representação
- 2 Prova de Teoremas
- 3 Conjuntos
- 4 Relações
- 5 Funções
- 6 Conjuntos Enumeráveis
- 7 Definições Recursivas
- 8 Indução Matemática

Sumário

- 1 Representação
- 2 Prova de Teoremas
- 3 Conjuntos
- 4 Relações
- 5 Funções
- 6 Conjuntos Enumeráveis
- 7 Definições Recursivas
- 8 Indução Matemática
- 9 Grafos

A matemática entre a entidade e a representação

<i>Entidade</i>	<i>Modelo matemático</i>	<i>Representação</i>
mês	número inteiro no intervalo $[1, 12]$	um dos caracteres 0 a 9, A ou B
remuneração	número real positivo	base 10
presença	vetor de números, um para cada dia do mês	sequência de reais na base 10
FP	relação	"arquivo"
cálculo de FP	algoritmo	programa

Sequência de símbolos: elemento fundamental das linguagens formais.

Características de provas de teoremas

- Estilo:
 - formal $\times$ informal;
 - conciso $\times$ prolixo.
- Prova:
 - vocabulário limitado: **se** ... **então**, **contradição** etc;
 - usa técnicas de prova.

Conectivos lógicos

Os conectivos lógicos: $\neg$, $\vee$, $\wedge$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$, $\forall$, $\exists$.

Tabela da verdade para a negação

Negação	
α	$\neg\alpha$
V	F
F	V

Conectivos lógicos

Tabela da verdade para a conjunção

<i>Conjunção</i>		
α	β	$\alpha \wedge \beta$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Conectivos lógicos

Tabela da verdade para a disjunção

<i>Disjunção</i>		
α	β	$\alpha \vee \beta$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Conectivos lógicos

Tabela da verdade para a condicional

<i>Condicional</i>		
α	β	$\alpha \rightarrow \beta$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Conectivos lógicos

Tabela da verdade para a bicondicional

<i>Bicondicional</i>		
α	β	$\alpha \leftrightarrow \beta$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Quantificação

- **Quantificação universal:** $\forall x P(x)$
 $P(x)$ é verdadeira
para todo x do universo.
- **Quantificação existencial:** $\exists x P(x)$
 $P(x)$ é verdadeira
para algum x do universo.

Exemplo:

Expressar formalmente:

todo número natural par ao quadrado é par.

Afirmativa válida

Verdadeira para todos os valores-verdade de suas subafirmativas.

Exemplos:

- $\alpha \vee \neg\alpha$
- $\alpha \rightarrow \alpha$
- $\alpha \vee (\alpha \rightarrow \beta)$
- $P(a) \rightarrow \exists xP(x)$
- $\forall xP(x) \leftrightarrow \neg\exists x\neg P(x)$

Contradição

Falsa para todos os valores-verdade de suas subafirmativas.

Exemplos:

- $\alpha \wedge \neg \alpha$
- $\alpha \leftrightarrow \neg \alpha$
- $(\alpha \wedge (\alpha \rightarrow \beta)) \wedge \neg \beta$
- $P(a) \wedge \neg \exists x P(x)$
- $\forall x P(x) \wedge \exists x \neg P(x)$

Equivalência lógica

$\alpha \equiv \beta$ se o valor-verdade de α e β é o mesmo para todos os valores-verdade de suas subafirmativas.

Exemplos:

- $\alpha \vee \beta \equiv \beta \vee \alpha$
- $\alpha \vee (\beta \wedge \gamma) \equiv (\alpha \vee \beta) \wedge (\alpha \vee \gamma)$
- $\neg(\alpha \wedge \beta) \equiv \neg\alpha \vee \neg\beta$
- $\alpha \rightarrow \beta \equiv \neg\alpha \vee \beta$
- $\alpha \leftrightarrow \beta \equiv (\alpha \rightarrow \beta) \wedge (\beta \rightarrow \alpha)$
- $\neg\forall x P(x) \equiv \exists x \neg P(x)$

Consequência lógica (implicação lógica)

$\Gamma \Rightarrow \beta$ se β é verdadeira sempre que as afirmativas em Γ também são.

Exemplos:

- $\{\alpha \rightarrow \beta, \alpha\} \Rightarrow \beta$
- $\{\alpha \rightarrow \beta, \neg\beta\} \Rightarrow \neg\alpha$
- $\{\alpha \rightarrow \beta, \neg\alpha \rightarrow \beta\} \Rightarrow \beta$
- $\{\alpha \rightarrow \beta, \beta \rightarrow \gamma\} \Rightarrow \alpha \rightarrow \gamma$
- $\{P(a) \Rightarrow \exists x P(x)$
- $\{P(a), \forall x (P(x) \rightarrow Q(x))\} \Rightarrow Q(a)$

Exemplos de regras de inferência

$$\frac{\alpha \quad \alpha \rightarrow \beta}{\beta}$$

$$\frac{\alpha \quad \neg \alpha \vee \beta}{\beta}$$

$$\frac{\neg \beta \quad \alpha \rightarrow \beta}{\neg \alpha}$$

$$\frac{\alpha \rightarrow \beta \quad \neg \alpha \rightarrow \beta}{\beta}$$

$$\frac{\alpha \rightarrow \beta \quad \beta \rightarrow \gamma}{\alpha \rightarrow \gamma}$$

$$\frac{\alpha \leftrightarrow \beta \quad \beta \leftrightarrow \gamma}{\alpha \leftrightarrow \gamma}$$

Relação entre $\rightarrow$ e $\Rightarrow$:

se $\Gamma \cup \{\alpha\} \Rightarrow \beta$, então $\Gamma \Rightarrow \alpha \rightarrow \beta$.

Técnica de prova: direta

Prova direta da implicação

Para provar $\alpha \rightarrow \beta$:

- 1 Supor α .
- 2 Provar β .

Exemplo:

- $n \text{ é par} \rightarrow n^2 \text{ é par.}$

Técnica de prova: pela contrapositiva

Prova da implicação pela contrapositiva

Para provar $\alpha \rightarrow \beta$:

- 1 Supor $\neg\beta$.
- 2 Provar $\neg\alpha$.

Exemplo:

- n^2 é par $\rightarrow n$ é par.

Técnica de prova: para universal

Prova de uma universal

Para provar $\forall x P(x)$:

- 1 Supor um x arbitrário (que não ocorre ainda).
- 2 Provar $P(x)$.

Exemplo:

- $\forall n \in \mathbf{N} (n \text{ é par} \rightarrow n^2 \text{ é par}).$

Técnica de prova: por contradição

Prova de uma afirmativa por contradição

Para provar α :

- 1 Supor $\neg\alpha$.
- 2 Provar uma contradição.

Exemplo:

- Existe uma infinidade de números primos.

Técnica de prova: por construção

Prova de uma existencial por construção

Para provar $\exists x \in A P(x)$:

- 1 Encontrar um $a \in A$ tal que $P(a)$.
- 2 Provar $P(a)$.

Exemplo:

- $\forall n \in \mathbf{N} \exists k \in \mathbf{N} \text{ } k \text{ tem } n \text{ divisores distintos.}$

Técnica de prova: por casos

Prova de uma afirmativa por casos

Para provar β :

- 1 Provar $\alpha_1 \vee \dots \vee \alpha_n$.
- 2 Provar $\alpha_1 \rightarrow \beta, \dots, \alpha_n \rightarrow \beta$.

Exemplo:

- $\forall x, y \in \mathbf{R} \min(x, y) + \max(x, y) = x + y$.

Técnica de prova: para bicondicional

Prova de uma bicondicional em duas partes

Para provar $\alpha \leftrightarrow \beta$:

- 1 Provar $\alpha \rightarrow \beta$.
- 2 Provar $\beta \rightarrow \alpha$.

Exemplo:

- $\forall n \in \mathbf{N} (n \text{ par} \leftrightarrow n^2 \text{ par}).$

O que é um conjunto?

Abstração matemática que visa capturar o conceito de coleção.

Lista não ordenada de **elementos** ou **membros**: $\{1, 2\} = \{2, 1\}$

Notação:

- $a \in A$: a **pertence** a A .
- $a \notin A$: a não pertence a A .

Exemplos:

- $\{\text{Mercúrio}, \text{Vênus}, \text{Terra}, \text{Marte}, \text{Júpiter}\}$
- $\{10, \text{Marte}, \{0\}, \{\text{Terra}, 1, 2, 3\}\}$

Tipos de conjuntos e conjuntos importantes

- O **conjunto vazio**: $\emptyset$.
- Conjuntos **unitário**, **finito**, **infinito**.
- **N**: números **naturais**.
- **Z**: números **inteiros**.
- **R**: números **reais**.
- **Q**: números **racionais**.

Notações importantes:

$\{x \mid P(x)\}$. Exemplo: $\{k \mid k = 2n + 1 \text{ e } n \in \mathbf{N}\}$.

$\{x \in A \mid P(x)\}$. Exemplo: $\{k \in \mathbf{R} \mid 0 \leq k \leq 1\}$.

Relações entre conjuntos

Relações básicas entre conjuntos

- **Suconjunto:** $A \subseteq B$ se e somente se $\forall x(x \in A \rightarrow x \in B)$.
- **Suconjunto próprio:** $A \subset B$ se e somente se $A \subseteq B$ e $A \neq B$.

Exemplos:

- $\emptyset \subseteq A$
- $\emptyset \subset A$ se $A \neq \emptyset$
- $\emptyset \not\subset \emptyset$

Operações sobre conjuntos

Operações básicas sobre conjuntos

- **União:** $A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ ou } x \in B\}.$
- **Interseção:** $A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ e } x \in B\}.$
- **Diferença:** $A - B = \{x \mid x \in A \text{ e } x \notin B\}.$
- **Complemento:** $\bar{A} = U - A.$

Exemplos de identidades

$$A \cup B = B \cup A$$

$$A \cap B = B \cap A$$

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$$

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

$$A - B = A \cap \overline{B}$$

Igualdade

$A = B$ se e somente se $A \subseteq B$ e $B \subseteq A$.

Prova de igualdade de conjuntos

Para provar $A = B$:

- 1 Provar $A \subseteq B$.
- 2 Provar $B \subseteq A$.

Algumas vezes é possível provar encadeando-se $\leftrightarrow$ s.

Exemplo:

- $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

Conjuntos disjuntos

A e B são **disjuntos** se e somente se $A \cap B = \emptyset$.

Exemplos:

- $\{0, 2, 4\}$ e $\{1, 3, 5\}$
- $\emptyset$ e A .
- A e $\overline{A}$.
- $A - B$ e $B - A$.

União e interseção generalizadas

União de n conjuntos

$$\bigcup_{i=1}^n A_i = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n.$$

Interseção de n conjuntos

$$\bigcap_{i=1}^n A_i = A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n.$$

Partição

Partição de um conjunto

Uma **partição** de A é o conjunto $\{B_1, \dots, B_n\}$ tal que:

- 1 $B_i \neq \emptyset$ para $1 \leq i \leq n$;
- 2 $B_i \cap B_j = \emptyset$ para $1 \leq i < j \leq n$; e
- 3 $\bigcup_{i=1}^n B_i = A$.

Exemplo: quais são as partições de $\{1, 2, 3\}$?

Conjunto potência; número de elementos

Conjunto potência

Conjunto potência de A : $\mathcal{P}(A) = \{X \mid X \subseteq A\}$.

Exemplo: que conjunto é $\mathcal{P}(\{1, 2, 3\})$?

Notação para **número de elementos** de A : $|A|$.

Exemplos: $|\emptyset| = 0$, $|\{\emptyset, 1, 2, \{1, 2, 3, 4, 5\}\}| = 4$, $|\mathcal{P}(A)| = 2^{|A|}$.

Produto cartesiano

Par não ordenado: (a, b) ou $[a, b]$.

Similarmente: tripla, quádrupla etc.

Produto cartesiano de dois conjuntos

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \text{ e } b \in B\}.$$

Exemplos:

- $\emptyset \times \{1, 2\} = \emptyset$.
- $\{1, 2\} \times \{1, 2\} = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2)\}$.
- $|A \times B| = |A| \cdot |B|$ se A e B forem finitos.

Produto cartesiano de n conjuntos: A^n .

O que é relação

Relação de n argumentos sobre $A_1, \dots, A_n$

Um subconjunto de $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$.

Relação **binária**: $R \subseteq A \times B$

Domínio: A .

Contradomínio: B .

Imagem: $\{y \mid (x, y) \in R \text{ para algum } x\}$.

Notação: $(x, y) \in R$ é o mesmo que $x R y$.

Um exemplo de reação binária

Relação $<\subseteq \mathbf{N} \times \mathbf{N}$:

- domínio: $\mathbf{N}$;
- contradomínio: $\mathbf{N} - \{0\}$;
- imagem: $\mathbf{N} - \{0\}$.

Propriedades

Inversa de R

$$R^{-1} = \{(y, x) \mid (x, y) \in R\}$$

Propriedades de uma relação binária $R \subseteq A \times A$

- **Reflexiva:** $\forall x \in A [xRx]$
- **Simétrica:** $\forall x, y \in A [xRy \rightarrow yRx]$.
- **Transitiva:** $\forall x, y, z \in A [(xRy \wedge yRz) \rightarrow xRz]$.

Propriedades/exemplos

Considere as relações:

- $<$ sobre $\mathbf{N}$;
- $\leq$ sobre $\mathbf{N}$;
- $\subseteq$ sobre $\mathcal{P}(\mathbf{N})$;
- $\equiv$ sobre o conjunto das afirmativas da lógica proposicional.

Para cada uma diga se a mesma é reflexiva, simétrica e transitiva.

Relação de equivalência

Relação de equivalência

Aquela que é reflexiva, simétrica e transitiva.

$\implies$ Induz **classes de equivalência**.

Exemplos:

- $(\text{mod } n) = \{(x, y) \in \mathbf{N}^2 \mid x \text{ mod } n = y \text{ mod } n\}$
- *fazem aniversário no mesmo dia.*

Que classes de equivalência induz $(\text{mod } 2)$? E $(\text{mod } 10)$?

E “*fazem aniversário no mesmo dia*”?

Fechos de uma relação

Fecho reflexivo

O **Fecho reflexivo** de $R \subseteq A \times A$ é S tal que:

- $R \subseteq S$;
- S é reflexiva;
- se $R \subseteq T$ e T é reflexiva, $S \subseteq T$.

Fechos **simétrico** e **transitivo**: análogos.

Qual é o fecho reflexivo de $<$? Qual é o fecho simétrico de $<$?

O que é uma função

Função parcial

Uma **função** $f : A \rightarrow B$: é uma relação $f \subseteq A \times B$ tal que:

$$\text{se } (x, y) \in f \text{ e } (x, z) \in f \text{ então } y = z.$$

- $(x, y) \in f$ é o mesmo que $f(x) = y$.
- f é **indefinida** para x se não há y tal que $f(x) = y$.
- Função **total**: definida para todo argumento.
- Função $f : A \rightarrow B$ de n argumentos:

$$A = A_1 \times \dots \times A_n.$$

Exemplos de funções

- $+: \mathbf{N} \times \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{N}$ (total)
- $/: \mathbf{N} \times \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{N}$ (parcial)

Composição de funções

Composição: $g \circ f(x) = g(f(x))$.

Exemplo:

Sejam $f : \mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{N}$ tal que $f(n) = |n| + 1$

$g : \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{Z}$ tal que $g(n) = 1 - n$.

Então:

- $g \circ f : \mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{Z}$ é tal que
$$(g \circ f)(n) = g(f(n)) = g(|n| + 1) = 1 - (|n| + 1) = -|n|.$$
- $f \circ g : \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{N}$ é tal que
$$(f \circ g)(n) = f(g(n)) = f(1 - n) = |1 - n| + 1.$$

Tipos de funções

Uma função total $f : A \rightarrow B$ é:

- **Injetora:** se $\forall x, y [x \neq y \rightarrow f(x) \neq f(y)]$.
Ex: $f : \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{N}$ tal que $f(n) = 2n$.
- **Sobrejetora:** se B é a imagem de f .
Ex: $g : \mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{N}$ tal que $g(n) = |n|$.
- **Bijetora:** se é injetora e sobrejetora.
Ex: $h : \mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{N}$ tal que $h(n) = 2n$ se $n \geq 0$, e
 $h(n) = -(2n + 1)$ se $n < 0$.

O que é conjunto enumerável

Cardinalidade

$\text{card}(A) = \text{card}(B)$ se existe uma função bijetora de A para B .

$\implies \text{card}(A) = \text{card}(B)$ se $|A| = |B|$, caso A e B sejam finitos.

$\implies A$ é **infinito** se existe $X \subset A$ tal que $\text{card}(X) = \text{card}(A)$.

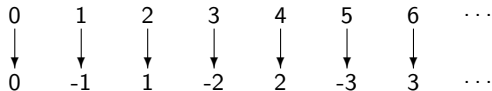
Conjunto enumerável

A é **enumerável** se $\text{card}(A) = \text{card}(\mathbf{N})$.

Conjunto **contável**: finito ou enumerável.

Um exemplo de conjunto enumerável

O conjunto $\mathbf{Z}$ é enumerável:



Um teorema facilitador

As seguintes afirmativas são equivalentes:

- 1 A é contável.
- 2 Existe função injetora de A para $\mathbf{N}$.
- 3 $A = \emptyset$ ou existe função sobrejetora de $\mathbf{N}$ para A .

Mais um exemplo de conjunto enumerável

O conjunto dos racionais positivos, $\mathbb{Q}^+$, é enumerável:

	1	2	3	4	5	...
0	0	1	3	6	10	
1	2	4	7	11		
2	5	8	12			
3	9	13				
4	14					
⋮						

$f(i, j) = (i + j)(i + j - 1)/2 + i$ é bijetora. Logo, existe uma função sobrejetora de $\mathbb{N}$ para $\mathbb{Q}^+$!

Resultados importantes

- 1 Todo subconjunto de conjunto contável é contável.
- 2 $A \times B$ é contável se A e B são contáveis.
- 3 $A \cup B$ é contável se A e B são contáveis.

Provando que um conjunto não é contável

Para provar que um conjunto infinito não é enumerável:

usar o método da **diagonalização de Cantor**.

$\mathcal{P}(\mathbf{N})$ não é enumerável:

	0	1	2	3	...
C_0	$\in$ ou $\notin$	$\in$ ou $\notin$	$\in$ ou $\notin$	$\in$ ou $\notin$	
C_1	$\in$ ou $\notin$	$\in$ ou $\notin$	$\in$ ou $\notin$	$\in$ ou $\notin$	
C_2	$\in$ ou $\notin$	$\in$ ou $\notin$	$\in$ ou $\notin$	$\in$ ou $\notin$	
C_3	$\in$ ou $\notin$	$\in$ ou $\notin$	$\in$ ou $\notin$	$\in$ ou $\notin$	
$\vdots$					

Outro conjunto não contável

O conjunto das funções $f : \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{N}$ não é contável:

	0	1	2	3	...
f_0	$f_0(0)$	$f_0(1)$	$f_0(2)$	$f_0(3)$	
f_1	$f_1(0)$	$f_1(1)$	$f_1(2)$	$f_1(3)$	
f_2	$f_2(0)$	$f_2(1)$	$f_2(2)$	$f_2(3)$	
f_3	$f_3(0)$	$f_3(1)$	$f_3(2)$	$f_3(3)$	
$\vdots$					

O que é definição recursiva

Definição recursiva do conjunto A

- (a) **Base:** especificação de $B \subset A$.
- (b) **Passo recursivo:** como obter elementos de A a partir de elementos de A .
- (c) **Fechamento:** só pertencem a A os referidos em (a) e (b).

Definição recursiva dos naturais

O conjunto $\mathbf{N}$ pode ser definido assim:

- a) $0 \in \mathbf{N}$;
- b) se $n \in \mathbf{N}$, então $s(n) \in \mathbf{N}$;
- c) só pertence a $\mathbf{N}$ o número que pode ser obtido de acordo com (a) e (b).

Definição recursiva de fatorial

A função fatorial, $fat : \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{N}$ é definida recursivamente por:

- a) $fat(0) = 1$;
- b) $fat(n) = n \times fat(n - 1)$, para $n \geq 1$.

Definição recursiva de soma

Definição recursiva da função $+$: $\mathbf{N} \times \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{N}$:

- a) $n + 0 = n$, para todo $n \in \mathbf{N}$;
- b) $m + s(n) = s(m + n)$, para todo $m, n \in \mathbf{N}$.

Definição recursiva da linguagem proposicional

Definição recursiva da linguagem LP da lógica proposicional:

- a) cada variável proposicional pertence a LP;
- b) se α e β pertencem a LP, então também pertencem a LP:
 - $\neg\alpha$;
 - $(\alpha \wedge \beta)$;
 - $(\alpha \vee \beta)$;
 - $(\alpha \rightarrow \beta)$;
 - $(\alpha \leftrightarrow \beta)$.

(Cláusula de fechamento implícita.)

Indução fraca

Baseada na validade de $[P(0) \wedge \forall n(P(n) \rightarrow P(n+1))] \rightarrow \forall nP(n)$:

Princípio de indução fraca

Se

- 1 $P(0)$, e
- 2 $\forall n(P(n) \rightarrow P(n+1))$,

então $\forall nP(n)$.

Estrutura de demonstração por indução fraca

- 1 Provar $P(0)$.
- 2 Seja $n \geq 0$ arbitrário.
- 3 Suponha $P(n)$ (**hipótese de indução**).
- 4 Provar $P(n + 1)$.
- 5 Concluir $\forall n P(n)$.

Uso de indução fraca

Exemplos:

- $\sum_{k=0}^n k = n(n+1)/2$.
- $n! > 2^n$ para todo $n \geq 4$.

Indução forte:

Baseada na validade de $\forall n(\forall k < n P(k) \rightarrow P(n)) \rightarrow \forall n P(n)$:

Princípio de indução forte

Se

- $\forall n(\forall k < n P(k) \rightarrow P(n))$

então $\forall n P(n)$.

Estrutura de demonstração por indução forte

- 1 Seja $n \geq 0$ arbitrário.
- 2 Suponha $\forall k < n P(k)$ (**hipótese de indução**).
- 3 Provar $P(n + 1)$.
- 4 Concluir $\forall n P(n)$.

Uso de indução forte

Função de Fibonacci:

- a) $F_0 = 0; F_1 = 1;$
- b) $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ para $n \geq 2$.

Exemplos:

- $F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right].$
- $\text{na}(\alpha) = \text{na}(\beta)$ para toda $\alpha \in \text{LP}$.

O que é grafo

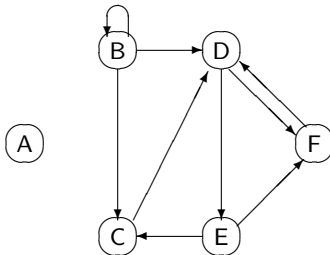
Grafo

Um grafo é um par (V, A) , sendo
 V um conjunto de **vértices** e
 A um conjunto de **arestas**.

Grafo **dirigido**: as arestas são pares ordenados.

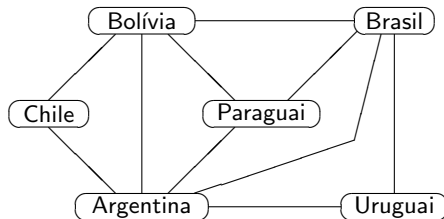
Grafo **não dirigido**: as arestas são pares não ordenados.

Exemplo de grafo dirigido



- Vértices: $\{A, B, C, D, E, F\}$.
- Arestas: $\{(B, B), (B, C), (B, D), (D, E), \dots\}$.

Exemplo de grafo não dirigido



- Vértices: $\{\text{Brasil}, \text{Bolívia}, \dots\}$.
- Arestas: $\{\{\text{Bolívia}, \text{Chile}\}, \{\text{Bolívia}, \text{Brasil}\}, \dots\}$.

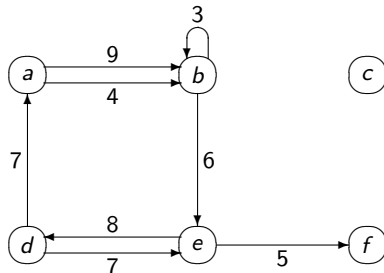
Grafos rotulados

Grafos podem ter **rótulos** associados a suas arestas e/ou vértices.

Grafo dirigido rotulado

Um grafo dirigido rotulado é uma tripla (V, A, R) ,
sendo V um conjunto de **vértices**,
 A um conjunto de **arestas rotuladas**, e
 R um conjunto de **rótulos**.

Um exemplo de grafo dirigido rotulado



- Vértices: $\{a, b, c, d, e, f\}$.
- Arestas: $\{(a, 4, b), (a, 9, b), (b, 3, b), \dots\}$.

Alguns conceitos importantes

Grau de um vértice

Número de arestas incidentes ao vértice.

Caminho de comprimento n de a para b

Sequência de vértices e arestas $v_0 x_1 v_1 x_2 v_2 \dots v_{n-1} x_n v_n$ tal que:

- $v_0 = a$;
- $v_n = b$; e
- $x_i = (v_{i-1}, v_i)$.

Caminhos

- Caminho **nulo**: caminho de comprimento zero.
- Caminho **fechado**: aquele em que $v_0 = v_n$.
- **Ciclo**: caminho fechado sem vértices e arestas repetidos, exceto v_0 e v_n .
- **Lazo**: ciclo de comprimento 1.
- **Caminho simples**: caminho sem vértices repetidos.
- Grafo **acíclico**: grafo sem ciclos.
- Grafo **conexo**: aquele em que existe caminho de qualquer vértice a qualquer outro.

árvore

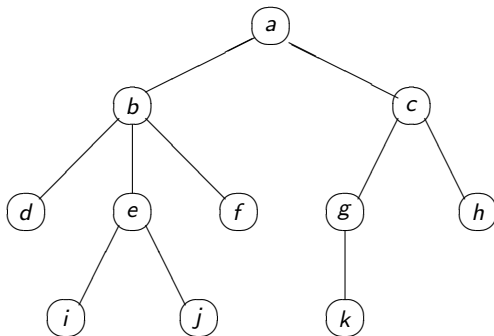
Uma árvore é um grafo acíclico conexo.

árvore com raiz

Uma árvore com raiz é uma tripla (V, A, r) tal que

- a) $(\{v\}, \emptyset, v)$ é árvore;
- b) se (V, A, r) é uma árvore, $v \in V$ e $v' \notin V$, então $V \cup \{v'\}, A \cup \{(v, v')\}, r)$ é árvore;
- c) nada mais é árvore.

Exemplo de árvore com raiz



Terminologia associada a árvores

- Filhos, pais, irmãos, descendente, ancestral.
- Vértice **interno**, **folha**.
- **Nível** de um vértice; **altura** da árvore.
- árvore **dirigida**; **ordenada**.
- **Frenteira** de uma árvore.