Universidade Federal de Minas Gerais
Programa de Pós-Graduação em Ciência da Computação

Comissão Permanente de Qualificação 1º Estágio – Curso de Doutorado

Exame de Qualificação 1º Estágio

Área: Teoria

Em 10/3/2010, 9:30 horas

Prova individual sem consulta com duração de 3 horas

Observações:

1. A prova deve ser resolvida nas folhas distribuídas juntamente com este caderno de questões e rubricadas por um aplicador.
2. A interpretação das questões faz parte da prova. Não será permitida nenhuma pergunta durante a realização da prova.
3. Caso você ache que falta algum detalhe nos enunciados ou nos esclarecimentos, você deverá fazer as suposições que achar necessárias e escrever essas suposições juntamente com as respostas.
4. Não se esqueça de escrever seu nome em todas as folhas de resposta.

Desejamos a você uma boa prova!

A COPEQ

Atenção: Esta prova contém um total de 12 (doze) questões, das quais você deve fazer 8 (oito), sendo:

1. quatro questões escolhidas entre as questões **1** a **6**,
2. quatro questões escolhidas entre as questões **7** a **12**.

Marque abaixo as questões que devem ser consideradas para avaliação:

1 2 3 4 5 6 (selecione até quatro)

7 8 9 10 11 12 (selecione até quatro)

Nome: ______________________________

Assinatura: ______________________________

Questão 1

Dados um alfabeto Σ, uma linguagem $L \subseteq \Sigma^*$ e uma palavra $x \in \Sigma^*$, sejam:

- $x/L = \{y \mid xy \in L\}$
- $L/x = \{y \mid yx \in L\}$

Mostre que se L é regular, então (a) x/L é regular e (b) L/x é regular.

Questão 2

Construa gramáticas livres do contexto que gerem as linguagens a seguir:

(a) $L_1 = \{\mathtt{a}^i\mathtt{b}^j \mid 1 \leq i \leq j \leq 2i\}$.

(b) $L_2 = \{\mathtt{a}^i\mathtt{b}^i \mid i \geq 1\} \cup \{\mathtt{a}^i\mathtt{b}^{2i} \mid i \geq 1\}$.

(c) $L_3 = \{w \in \{\mathtt{a}, \mathtt{b}, \overline{\mathtt{a}}, \overline{\mathtt{b}}\}^* \mid w$ não tem $\mathtt{a}\overline{\mathtt{a}}$ nem $\mathtt{b}\overline{\mathtt{b}}$ como subpalavra$\}$.

(d) $L_4 = \{w \in \{\mathtt{a}, \mathtt{b}, \overline{\mathtt{a}}, \overline{\mathtt{b}}\}^* \mid w$ é redutível a $\lambda\}$.

Uma palavra w é redutível a uma palavra z se z pode ser obtida de w aplicando-se as regras (zero ou mais vezes):

1. $x\mathtt{a}\overline{\mathtt{a}}y \Rightarrow xy$
2. $x\mathtt{b}\overline{\mathtt{b}}y \Rightarrow xy$

Exemplos:

- $\lambda, \mathtt{a}\overline{\mathtt{a}}, \mathtt{aa}\overline{\mathtt{a}\mathtt{a}}, \mathtt{ba}\overline{\mathtt{ab}}, \mathtt{a}\overline{\mathtt{a}}\mathtt{b}\overline{\mathtt{b}} \in L_4$;
- $\mathtt{a}, \overline{\mathtt{a}}\mathtt{a}, \mathtt{ab}\overline{\mathtt{b}}, \mathtt{a}\overline{\mathtt{a}}\mathtt{bb}\overline{\mathtt{b}} \notin L_4$.

Questão 3

Uma gramática na forma normal de Chomsky é aquela que tem apenas regras das formas $A \to BC$ e $A \to a$, onde A, B e C são variáveis e a é terminal. Demonstre que, considerando apenas gramáticas nessa forma, toda árvore de derivação para palavras de n símbolos tem $2n-1$ vértices internos (ou seja, $2n-1$ vértices rotulados com variáveis).

Questão 4

Cada problema, a seguir, tem como único parâmetro uma gramática livre do contexto G cujo alfabeto de terminais é Σ. Para cada um deles, mostre que o mesmo é ou não decidível.

(a) Determinar se $\lambda \in L(G)$.

(b) Determinar se $L(G) = \emptyset$.

(c) Determinar se $L(G) = \Sigma^*$.

Questão 5

O grafo reverso de um grafo dirigido $G = (V, E)$, representado por G^r, é o grafo dirigido (V, F) onde $(u, v) \in F$, se, e somente se, $(v, u) \in E$. Mostre que $G = G^r$ se, e somente se, a relação associada com G é simétrica.

Questão 6

Quantos vértices e quantas arestas têm os grafos abaixo:

(a) O grafo completo K_n.

(b) O grafo bipartido completo $K_{m,n}$.

(c) O grafo cubo Q_n.

Questão 7

Seja um vetor de n números não ordenados. Apresente um algoritmo eficiente para determinar apenas o número que ocupará a k-ésima posição do vetor ordenado em ordem ascendente. Apresente a ordem de complexidade do seu algoritmo.

Questão 8

Um torneio é um grafo dirigido que contém uma única aresta entre cada par de vértices. Mostre que em um torneio envolvendo V vértices, há um $X \subseteq V$, tal que $|X| = \log(|V|)$, onde para todos os vértices $u \in V \backslash X$ existe um vértice $v \in X$ e uma aresta $v \to u$. (Em outras palavras, mostre que há um pequeno número de jogadores em um torneio tal que todos os outros jogadores venceram pelo menos um daquele grupo de jogadores).

Questão 9

Uma definição popular do problema da mochila é: dado um conjunto de n itens, onde cada item i tem um tamanho t_i e um lucro l_i, encontre o subconjunto de itens que caiba em uma mochila de tamanho B e que proporcione lucro máximo. O problema da mochila múltipla generaliza o problema original considerando m mochilas de igual capacidade. Prove que o problema da mochila múltipla é NP-completo.

Questão 10

Suponha que você tenha n inteiros únicos, os quais podem ser organizados em uma árvore binária de várias formas diferentes, resultando em árvores diferentes. Descreva uma estratégia recursiva para calcular o número de possíveis árvores diferentes e apresente o pseudo-código que emprega o paradigma de programação dinâmica para calcular este número.

Questão 11

A cobertura de vértices de um grafo é um conjunto de vértices tal que para cada aresta do grafo, pelo menos um dos seus extremos pertence ao conjunto cobertura. Se removermos todos os vértices do conjunto cobertura, o grafo resultante será completamente desconexo. Encontrar o menor conjunto cobertura de vértices é um problema complexo. Considere o seguinte algoritmo:

$VC \leftarrow \emptyset$
Enquanto $A \neq \emptyset$
    Selecione $a \in A$ aleatoriamente
    $VC \leftarrow VC + \{u, v\} \,|\, a = u \to v$
    Remova todas as arestas que contenham u ou v

Este algoritmo é ótimo? Por que?

Questão 12

Seja $G = (V, E)$ um grafo dirigido onde cada vértice $u \in V$ é rotulado com um inteiro único $L(u) \in \{1, 2, \ldots, |V|\}$. Para cada vértice $u \in V$, seja $R(u) = \{v \in V | u \rightsquigarrow v\}$ o conjunto de vértices que são alcançáveis a partir de u. Defina $min(u)$ como o vértice in $R(u)$ cujo rótulo seja mínimo entre os vértices que compõem $R(u)$. Apresente um algoritmo com complexidade $O(V + E)$ que calcule $min(u)$ para todos os vértices de G.