

Universidade Federal de Minas Gerais
Programa de Pós-Graduação em Ciência da Computação
Exame de Qualificação 1º Estágio
2º Semestre de 2009

Observações:

- Faz parte da prova a interpretação das questões. Caso você ache que falta algum detalhe nas especificações, faça as suposições que achar necessárias e escreva estas suposições juntamente com as respostas.
- Prova individual e sem consulta com duração de três horas, ou 90 minutos caso esteja fazendo apenas uma parte da prova.
- Todas as questões devem ser justificadas.
- Somente serão corrigidas respostas legíveis.
- Escreva seu nome na folha de respostas. Boa sorte!
- Das questões 1 a 6 escolha quatro. Das questões 7 a 12 escolha 4.

Teoria da Computação e Matemática Discreta

1ª Questão

Sejam $\Sigma = \{0, 1\}$ e

- $L_1 = \{w \in \Sigma^* \mid w \text{ tem um número primo de 0s}\}$, e
- $L_2 = \{w \in \Sigma^* \mid w \text{ tem um número par de 1s}\}$.

- Usando o lema do bombeamento (*pumping lemma*), prove que L_1 não é regular.
- Construa uma expressão regular que denote L_2 .
- Para cada linguagem a seguir, mostre se ela é ou não regular:
 - $\overline{L_1}$;
 - $L_1 \cup L_2$;
 - $L_1 \cap \overline{L_2}$.

2ª Questão

Seja G a gramática

$$P \rightarrow \mathbf{aPa} \mid \mathbf{bPb} \mid \mathbf{aAb}$$

$$A \rightarrow \mathbf{aA} \mid \mathbf{Ab} \mid \lambda$$

- Que linguagem é gerada por G ?
- Mostre que G é ambígua.
- Construa uma gramática não ambígua equivalente a G .

3ª Questão

Para cada afirmativa abaixo, diga se ela é verdadeira ou falsa, justificando sua resposta.

- As linguagens de programação (Java, C, Pascal etc.) não são recursivas.
- Se L_1 não é recursiva e L_2 é recursiva, então L_1L_2 não é recursiva.
- Se L é recursivamente enumerável, mas não recursiva, não existe máquina de Turing que reconheça \overline{L} .
- Se L não é recursivamente enumerável, \overline{L} também não é.

4ª Questão

Considerando máquinas de Turing com alfabeto $\Sigma = \{0, 1\}$, mostre como o problema da parada pode ser reduzido aos seguintes:

- Determinar se uma máquina de Turing para se sua entrada é 1.
- Determinar se uma máquina de Turing para se sua entrada é uma palavra qualquer.
- Determinar se uma máquina de Turing retorna ao estado inicial durante o processamento da palavra 1.

Para cada um destes problemas, use o teorema de Rice para mostrar que ele é indecidível, caso possível.

5ª Questão

Prove por indução matemática o seguinte predicado:

$$P(n) : (1 + 2 + \dots + n)^2 = 1^3 + 2^3 + \dots + n^3, n \geq 1$$

6ª Questão

Seja $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, $n \geq 1$ e $\mathcal{P}(X)$ o conjunto potência de X . Seja \odot a relação binária definida em $\mathcal{P}(X)$ como: $\forall A, B \in \mathcal{P}(X), A \odot B \Leftrightarrow$ o número de elementos em A é igual ao número de elementos em B . Diga se a relação binária \odot é uma relação reflexiva, simétrica, anti-simétrica e transitiva.

Algoritmos e Estruturas de Dados

7ª Questão

Considere que a malha aérea brasileira seja representada por um grafo direcionado $G(V, E)$, onde cada $v_i \in V$ representa um aeroporto e cada $e_{ij} \in E$ representa um trecho aéreo saindo do aeroporto v_i e chegando no aeroporto v_j . Responda as seguintes perguntas:

- Discuta qual representação é mais adequada para representar esse problema: matriz ou lista de adjacências.
- Considerando a representação por matriz de adjacências, qual é a complexidade para determinar o número de trechos que saem de um determinado aeroporto. E qual é complexidade para determinar o número de trechos que chegam a um determinado aeroporto. Explique sua resposta.
- Implemente um algoritmo que determine a rota com o menor número de escalas entre dois aeroportos v_i e v_j .

8ª Questão

Discuta quais as situações que levam ao melhor caso e ao pior caso do Quicksort e determine a sua ordem de complexidade nesses casos. Para o cálculo da complexidade, determine e resolva a equação de recorrência correspondente a cada caso.

9ª Questão

Um Torneio é uma árvore binária completa onde os dados são armazenados nas folhas e cada nó interno armazena o maior de seus dois filhos.

- Discuta qual seria uma estrutura de dados eficiente (em termos de memória) para representar um torneio.
- Implemente um algoritmo de ordenação eficiente ($O(n \log n)$) para essa estrutura.

10ª Questão

Considere um grafo direcionado $G = (V, E)$. Considere ainda que sejam associados custos $\{c_{ij} \geq 0 : (i, j) \in E\}$ às arestas de E . Utilizando Programação Dinâmica, apresente um algoritmo que permita determinar o custo do caminho mínimo (e o caminho propriamente) que conecte uma origem s a um destino t do grafo, usando não no máximo k arcos.

11ª Questão

Para cada proposição abaixo, diga se está certa ou errada, fornecendo uma justificativa ou um contra-exemplo.

- Um algoritmo ótimo para um certo problema resolve o problema em um número polinomial de passos.
- Se aplicado a um array já ordenado com n elementos, o algoritmo MergeSort termina em $O(n)$.
- Dadas duas listas ordenadas simplesmente encadeadas L_1 e L_2 , com comprimentos n_1 e n_2 , respectivamente, sempre é possível determinar se L_1 contém todos os valores de L_2 em $O(n_2)$.

12ª Questão

- (a) Considere o seguinte conjunto S de funções onde $k \geq 4$ é uma constante e \log é o logaritmo de base 2.

$$S = \{k^{n+1}; n^{\log k}; f(n) = 2(f(\frac{n}{2}) + 15) + n, \text{ sendo } f(1) = 1; n^k; \sqrt{n^3}; k^n; n^{k+1}; k^{\log n}\}$$

Ordene as funções em S de acordo com as suas taxas de crescimento, i.e, coloque na seqüência f_1, f_2, \dots, f_8 tal que $O(f_i) \subseteq O(f_{i+1})$ para $i = 1 \dots 7$. O conjunto inclui funções com taxas de crescimento iguais?

No caso da função , $f(n) = 2(f(\frac{n}{2}) + 15) + n$, calcule explicitamente seu limite assintótico.

- (b) Algoritmos A e B têm o tempo de complexidade no pior caso, respectivamente, $O(n^2)$ e $O(n \log n)$. Em alguns conjuntos de dados, o tempo de execução de A é mais curto que o tempo de execução de B, *quando testados no mesmo ambiente (i.e., mesma arquitetura, mesmo sistema operacional, etc)*. Forneça três possíveis explicações para esse fenômeno.