Counting graph orientations with no directed triangles

Fábio Botler

Universidade Federal do Rio de Janeiro

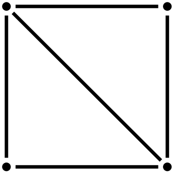
fbotler@cos.ufrj.br

www.cos.ufrj.br/~fbotler

com P. Araújo e G. O. Mota

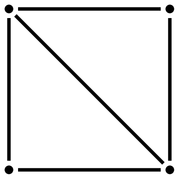
G – grafo simples (sem laços, sem arestas múltiplas)

G – grafo simples (sem laços, sem arestas múltiplas)



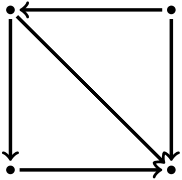
G – grafo simples (sem laços, sem arestas múltiplas)

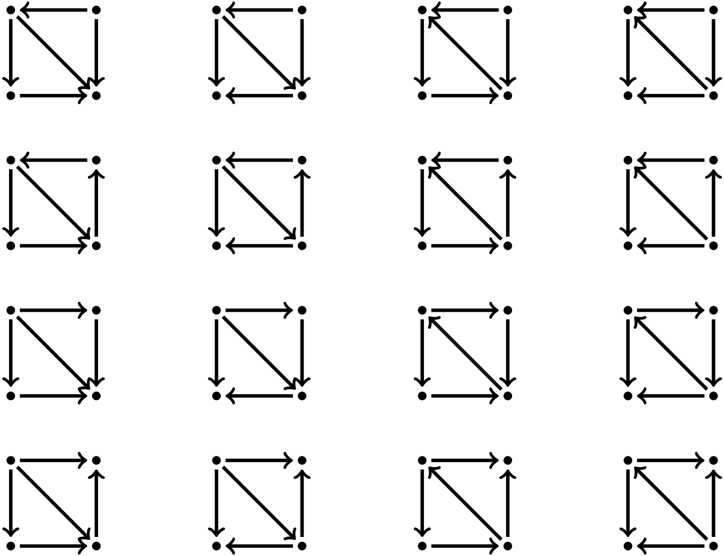
Uma **orientação** de G é uma atribuição de uma direção para cada aresta de G



G – grafo simples (sem laços, sem arestas múltiplas)

Uma **orientação** de G é uma atribuição de uma direção para cada aresta de G





De quantas formas podemos orientar um grafo?

De quantas formas podemos orientar um grafo?

Cada aresta pode ser orientada em duas direções.

De quantas formas podemos orientar um grafo?

Cada aresta pode ser orientada em duas direções.

Então são $2^{|E(G)|}$ formas.

De quantas formas podemos orientar um grafo?

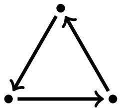
Cada aresta pode ser orientada em duas direções.

Então são $2^{|E(G)|}$ formas.

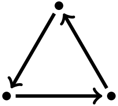
Qual é o número máximo de formas que podemos orientar um grafo de forma a evitar um determinado padrão?

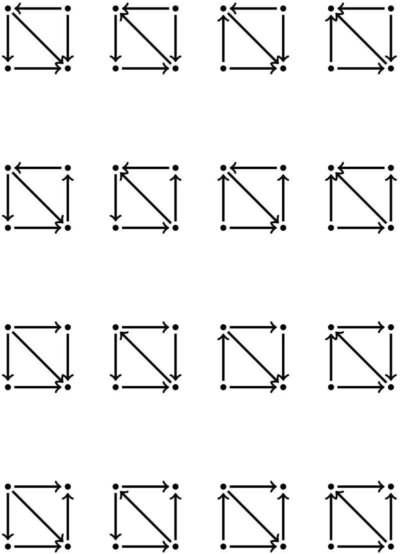
(Erdős, 1974)

Ex: $K_3^{\circlearrowright}$

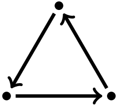


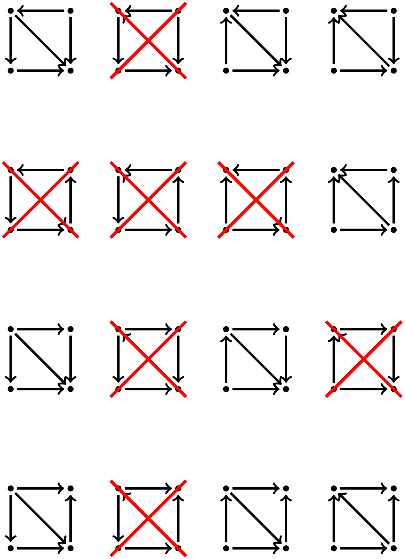
Ex: $K_3^{\circlearrowright}$





Ex: $K_3^{\circlearrowright}$





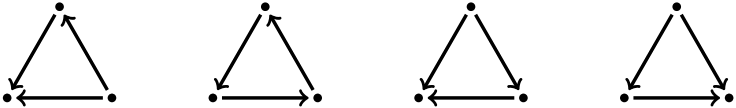
$D(G) =$ número de orientações de G livres de $K_3^{\circlearrowright}$.

$D(G) =$ número de orientações de G livres de $K_3^{\circlearrowright}$.

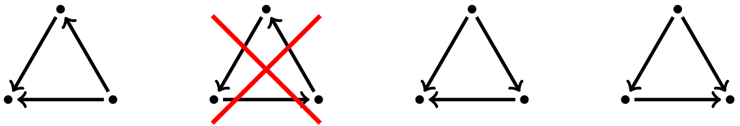
Ex: $D(K_4 - e) = 18$

Triângulos

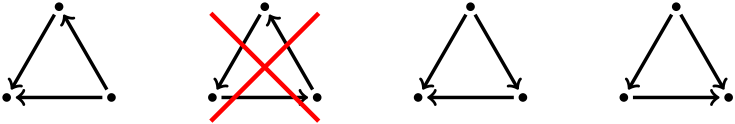
Triângulos



Triângulos

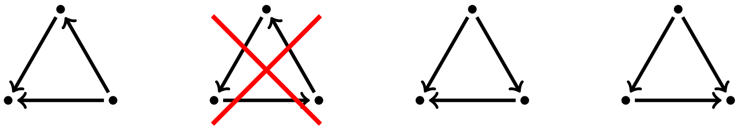


Triângulos



$$D(K_3) = 6$$

Triângulos

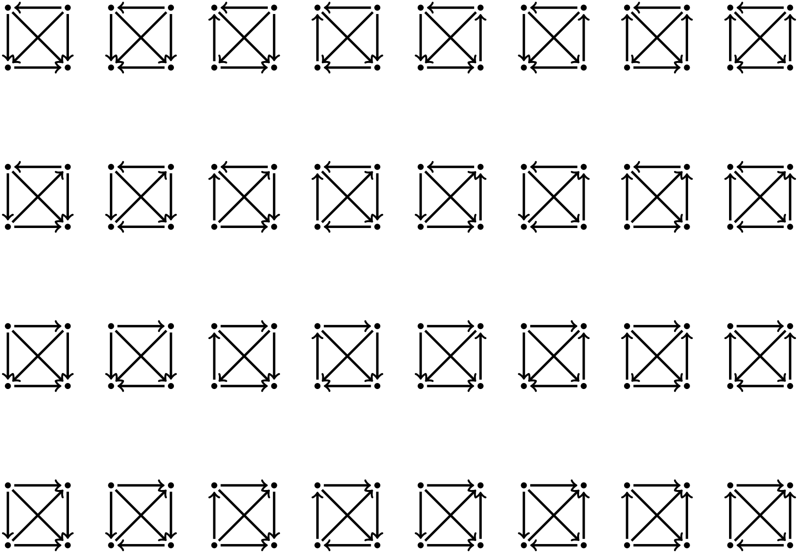


$$D(K_3) = 6$$

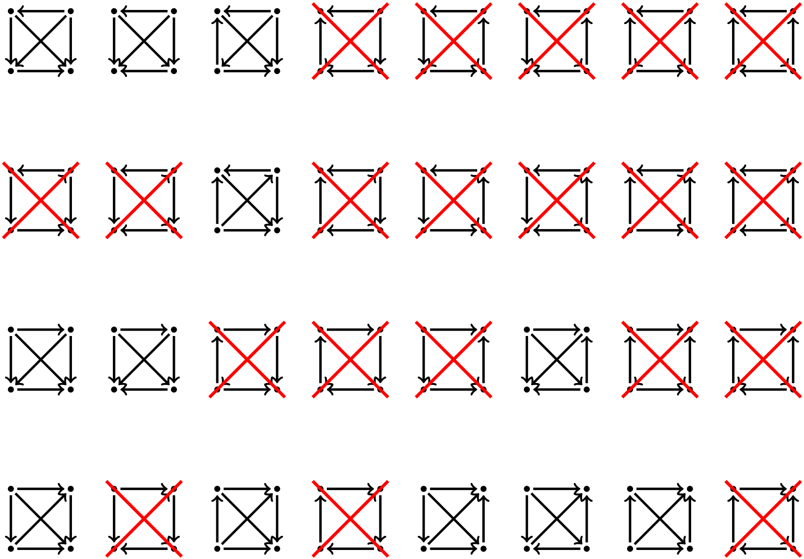
Há dois tipos de orientações do K_3: direcionada e transitiva

K_4

K_4



K_4



K_n

K_n

Todo K_3 é transitivo.

K_n

Todo K_3 é transitivo.

Induz uma ordenação total dos vértices.

K_n

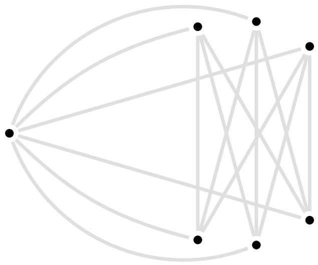
Todo K_3 é transitivo.

Induz uma ordenação total dos vértices.

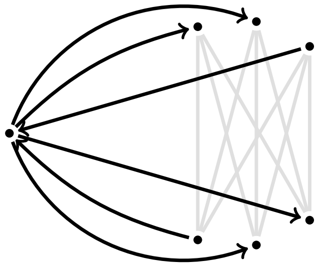
$D(K_n) = n!$

$K_{1,\ell,\ell}$

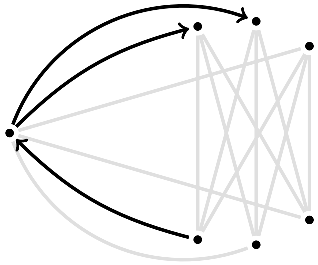
$K_{1,\ell,\ell}$



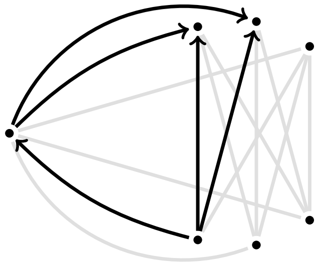
$K_{1,\ell,\ell}$



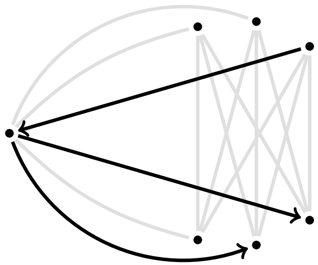
$K_{1,\ell,\ell}$



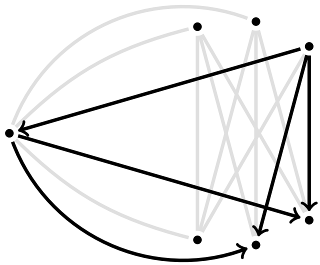
$K_{1,\ell,\ell}$



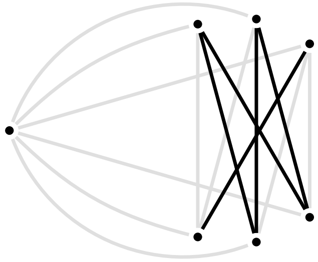
$K_{1,\ell,\ell}$



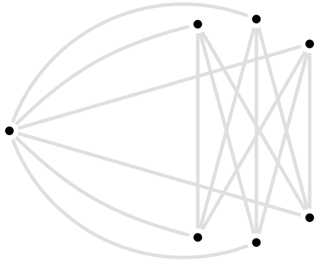
$K_{1,\ell,\ell}$



$K_{1,\ell,\ell}$

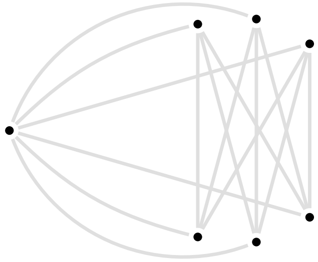


$K_{1,\ell,\ell}$



$$D(K_{1,\ell,\ell}) = \sum_{i=0}^{\ell} \sum_{j=0}^{\ell} \binom{\ell}{i} \binom{\ell}{j} 2^{(\ell-i)j+(\ell-j)i}$$

$K_{1,\ell,\ell}$



$$D(K_{1,\ell,\ell}) = \sum_{i=0}^{\ell} \sum_{j=0}^{\ell} \binom{\ell}{i}\binom{\ell}{j} 2^{(\ell-i)j+(\ell-j)i}$$

Ex: $D(K_{1,2,2}) = 82 \qquad D(K_{1,3,3}) = 2754.$

Grafos livres de triângulos

$$D(G) = 2^{|E(G)|}$$

Grafos livres de triângulos

$D(G) = 2^{|E(G)|}$

Se G é livre de triângulos, então

$$|E(G)| < \left\lfloor \frac{|V(G)|^2}{4} \right\rfloor .$$

(Mantel, 1907)

Grafos livres de triângulos

$$D(G) = 2^{|E(G)|} \leq 2^{\lfloor |V(G)|^2/4 \rfloor}$$

Se G é livre de triângulos, então

$$|E(G)| < \left\lfloor \frac{|V(G)|^2}{4} \right\rfloor .$$

(Mantel, 1907)

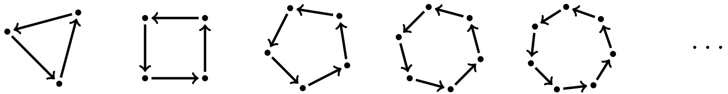
Grafos aleatórios

Grafos aleatórios

$D(G, C_r^{\circlearrowright}) =$ número de orientações de G sem circuito direcionado de comprimento r.

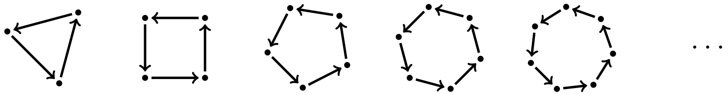
Grafos aleatórios

$D(G, C_r^{\circlearrowright}) =$ número de orientações de G sem circuito direcionado de comprimento r.



Grafos aleatórios

$D(G, C_r^{\circlearrowright}) =$ número de orientações de G sem circuito direcionado de comprimento r.



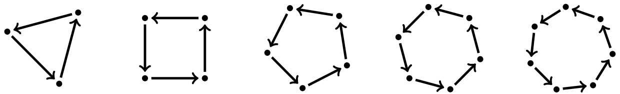
Seja $r \geq 3$. Com alta probabilidade, quando $n \to \infty$, temos

$$D(G(n,p), C_r^{\circlearrowright}) = \begin{cases} 2^{(1+o(1))p\binom{n}{2}} & \text{se } n^{-2} \ll p \ll n^{-(r-2)/(r-1)}, \\ 2^{o(pn^2)} & \text{se } p \gg n^{-(r-2)/(r-1)} \end{cases}$$

(Allen–Kohayakawa–Mota–Parente, 2018)

Grafos aleatórios

$D(G, C_r^{\circlearrowright}) =$ número de orientações de G sem circuito direcionado de comprimento r.



$\dots$

Seja $r \geq 3$. Com alta probabilidade, quando $n \to \infty$, temos

$$D(G(n,p), C_r^{\circlearrowright}) = \begin{cases} 2^{(1+o(1))p\binom{n}{2}} & \text{se } n^{-2} \ll p \ll n^{-(r-2)/(r-1)}, \\ 2^{o(pn^2)} & \text{se } p \gg n^{-(r-2)/(r-1)} \end{cases}$$

(Allen–Kohayakawa–Mota–Parente, 2018)

O seguinte vale com alta probabilidade, quando $n \to \infty$, temos

$$D(G(n,p), C_3^{\circlearrowright}) = \begin{cases} 2^{(1+o(1))p\binom{n}{2}} & \text{se } n^{-2} \ll p \ll n^{-1/2}, \\ 2^{\tilde{\Theta}(n/p)} & \text{se } p \gg n^{-1/2} \end{cases}$$

(Collares–Kohayakawa–Morris–Mota, 2014)

Todos os grafos

Todos os grafos

$$D(n) = \max\{D(G)\colon |V(G)| = n\}.$$ (Erdős, 1974)

Todos os grafos

$$D(n) = \max\{D(G)\colon |V(G)| = n\}.$$

(Erdős, 1974)

Se n é suficientemente grande, então $D(n) \leq 2^{\lfloor n^2/4 \rfloor}$;

Se $n \leq 8$, então $D(n) \leq \max\{n!, 2^{\lfloor n^2/4 \rfloor}\}$.

(Alon–Yuster, 2006)

Todos os grafos

$$D(n) = \max\{D(G) \colon |V(G)| = n\}.$$

(Erdős, 1974)

Se n é suficientemente grande, então $D(n) \leq 2^{\lfloor n^2/4 \rfloor}$;

Se $n \leq 8$, então $D(n) \leq \max\{n!, 2^{\lfloor n^2/4 \rfloor}\}$.

(Alon–Yuster, 2006)

Conjectura (Alon–Yuster, 2006). Se $n \geq 1$, então

$$D(n) \leq \max\{n!, 2^{\lfloor n^2/4 \rfloor}\}$$

Todos os grafos

$$D(n) = \max\{D(G)\colon |V(G)| = n\}.$$ (Erdős, 1974)

Se n é suficientemente grande, então $D(n) \leq 2^{\lfloor n^2/4 \rfloor}$;

Se $n \leq 8$, então $D(n) \leq \max\{n!, 2^{\lfloor n^2/4 \rfloor}\}$.

(Alon–Yuster, 2006)

Conjectura (Alon–Yuster, 2006). Se $n \geq 1$, então

$$D(n) \leq \max\{n!, 2^{\lfloor n^2/4 \rfloor}\} = \begin{cases} n!, & \text{se } n \leq 7 \\ 2^{\lfloor n^2/4 \rfloor}, & \text{se } n \geq 8 \end{cases}$$

Conjectura: Se $n \geq 1$, então $D(n) \leq \max\{n!, 2^{\lfloor n^2/4 \rfloor}\}$

(Alon–Yuster, 2006)

Conjectura: Se $n \geq 1$, então $D(n) \leq \max\{n!, 2^{\lfloor n^2/4 \rfloor}\}$

(Alon–Yuster, 2006)

Se $n \geq 1$, então $D(n) \leq \max\{n!, 2^{\lfloor n^2/4 \rfloor}\}$.

Além disso, $D(G) = D(n)$ se e somente se $G \simeq K_{\lfloor n/2 \rfloor, \lceil n/2 \rceil}$.

(Araújo–B.–Mota, 2020)

Orientações compatíveis

Orientações compatíveis

Sejam $S, T \subseteq E(G)$ dois conjuntos disjuntos.

Orientações compatíveis

Sejam $S, T \subseteq E(G)$ dois conjuntos disjuntos.

Dizemos as orientações $\vec{S}$ e $\vec{T}$ de S e T são **compatíveis** se $\vec{S} \cup \vec{T}$ não possui triangulo direcionado.

Orientações compatíveis

Sejam $S, T \subseteq E(G)$ dois conjuntos disjuntos.

Dizemos as orientações $\vec{S}$ e $\vec{T}$ de S e T são **compatíveis** se $\vec{S} \cup \vec{T}$ não possui triangulo direcionado.

Dados conjuntos disjuntos $A, B \subset V(G)$, seja $T = E(G[A] \cup G[B])$.

$$ext_G(A, B) = \max_{\vec{T}} |\{\vec{S} \colon \vec{S} \text{ e } \vec{T} \text{ são compatíveis}\}|$$

Orientações compatíveis

Sejam $S, T \subseteq E(G)$ dois conjuntos disjuntos.

Dizemos as orientações $\vec{S}$ e $\vec{T}$ de S e T são **compatíveis** se $\vec{S} \cup \vec{T}$ não possui triangulo direcionado.

Dados conjuntos disjuntos $A, B \subset V(G)$, seja $T = E(G[A] \cup G[B])$.

$$ext_G(A, B) = \max_{\vec{T}} |\{\vec{S} \colon \vec{S} \text{ e } \vec{T} \text{ são compatíveis}\}|$$

Lema. Seja (A, B) uma bipartição dos vértices de G. Então

$$D(G) \leq D(G[A]) \cdot ext_G(A, B) \cdot D(G[B])$$

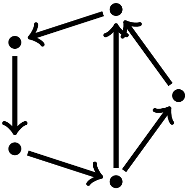
Orientações compatíveis

Orientações compatíveis

Se A é um clique e $B = \{u\}$, então $ext_G(A, B) \leq d(u) + 1$.

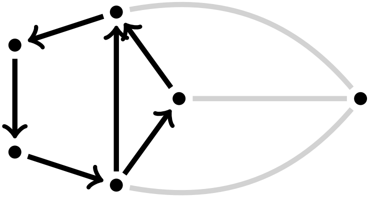
Orientações compatíveis

Se A é um clique e $B = \{u\}$, então $ext_G(A, B) \leq d(u) + 1$.



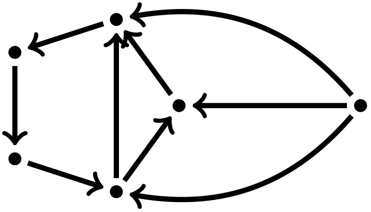
Orientações compatíveis

Se A é um clique e $B = \{u\}$, então $ext_G(A, B) \leq d(u) + 1$.



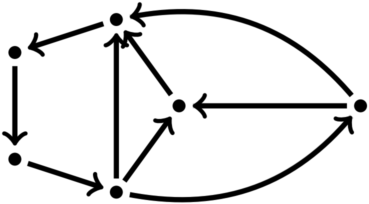
Orientações compatíveis

Se A é um clique e $B = \{u\}$, então $ext_G(A, B) \leq d(u) + 1$.



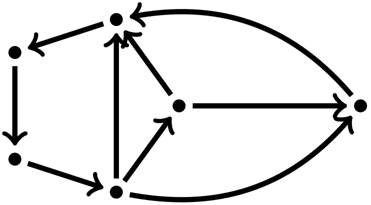
Orientações compatíveis

Se A é um clique e $B = \{u\}$, então $ext_G(A, B) \leq d(u) + 1$.



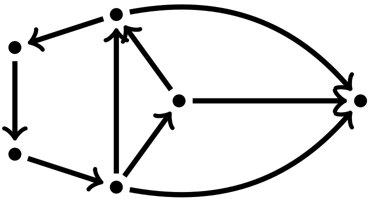
Orientações compatíveis

Se A é um clique e $B = \{u\}$, então $ext_G(A, B) \leq d(u) + 1$.



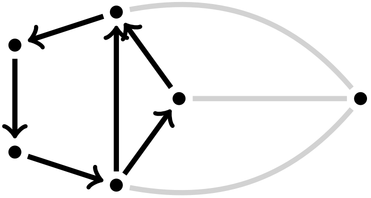
Orientações compatíveis

Se A é um clique e $B = \{u\}$, então $ext_G(A, B) \leq d(u) + 1$.



Orientações compatíveis

Se A é um clique e $B = \{u\}$, então $ext_G(A, B) \leq d(u) + 1$.

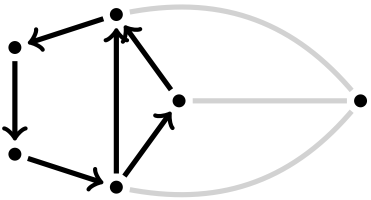


Corolário. Se G é um grafo (A, B)-split, então

$$D(G) = |A|! \prod_{u \in B} (d(u) + 1)$$

Orientações compatíveis

Se A é um clique e $B = \{u\}$, então $ext_G(A, B) \leq d(u) + 1$.



Corolário. Se G é um grafo (A, B)-split, então

$$D(G) = |A|! \prod_{u \in B} (d(u) + 1) \leq |A|! \cdot (|A| + 1)^{|B|}$$

Orientações compatíveis

Orientações compatíveis

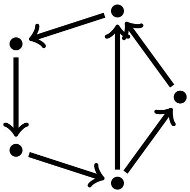
Se A é um clique, $B = \{u, v\}$ induz uma aresta e $|N(u) \cap N(v)| = 1$, então

$$ext_G(A, B) \leq (d_A(u) + 1)(d_A(v) + 1) - 1.$$

Orientações compatíveis

Se A é um clique, $B = \{u, v\}$ induz uma aresta e $|N(u) \cap N(v)| = 1$, então

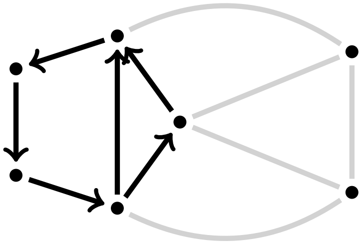
$$ext_G(A, B) \leq (d_A(u) + 1)(d_A(v) + 1) - 1.$$



Orientações compatíveis

Se A é um clique, $B = \{u, v\}$ induz uma aresta e $|N(u) \cap N(v)| = 1$, então

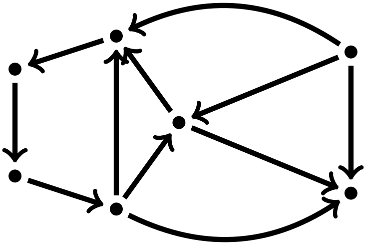
$$ext_G(A, B) \leq (d_A(u) + 1)(d_A(v) + 1) - 1.$$



Orientações compatíveis

Se A é um clique, $B = \{u, v\}$ induz uma aresta e $|N(u) \cap N(v)| = 1$, então

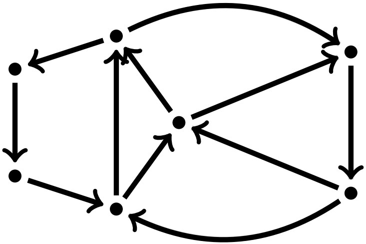
$$ext_G(A, B) \leq (d_A(u) + 1)(d_A(v) + 1) - 1.$$



Orientações compatíveis

Se A é um clique, $B = \{u, v\}$ induz uma aresta e $|N(u) \cap N(v)| = 1$, então

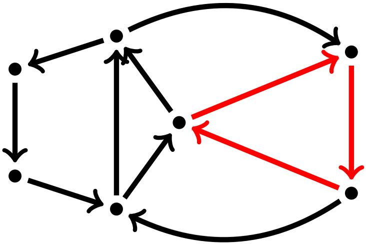
$$ext_G(A, B) \leq (d_A(u) + 1)(d_A(v) + 1) - 1.$$



Orientações compatíveis

Se A é um clique, $B = \{u, v\}$ induz uma aresta e $|N(u) \cap N(v)| = 1$, então

$$ext_G(A, B) \leq (d_A(u) + 1)(d_A(v) + 1) - 1.$$



Orientações compatíveis

Orientações compatíveis

Se G é um grafo livre de K_{r+1} e A e B são dois cliques, onde $|B| = 2$, então

$$ext_G(A, B) \leq r^2 - \binom{r-1}{2}$$

Orientações compatíveis

Se G é um grafo livre de K_{r+1} e A e B são dois cliques, onde $|B| = 2$, então

$$ext_G(A, B) \leq r^2 - \binom{r-1}{2}$$

Se G é um grafo livre de K_4 e A e B são cliques de tamanho 2, então $ext_G(A, B) \leq 5$.

Orientações compatíveis

Se G é um grafo livre de K_{r+1} e A e B são dois cliques, onde $|B| = 2$, então

$$ext_G(A, B) \leq r^2 - \binom{r-1}{2}$$

Se G é um grafo livre de K_4 e A e B são cliques de tamanho 2, então $ext_G(A, B) \leq 5$.

Seja G um grafo livre de K_4 e A e B são cliques de tamanho 3, então $ext_G(A, B) \leq 15$.

Teorema principal

Teorema principal

Teorema (Araújo–B.–Mota, 2020)

Se $n \geq 16$, então $D(n) \leq \max\{n!, 2^{\lfloor n^2/4 \rfloor}\}$.

Teorema principal

Teorema (Araújo–B.–Mota, 2020)

Se $n \geq 16$, então $D(n) \leq \max\{n!, 2^{\lfloor n^2/4 \rfloor}\}$.

Ideia: analisar o tamanho do maior clique de G.

Teorema principal

Teorema (Araújo–B.–Mota, 2020)

Se $n \geq 16$, então $D(n) \leq \max\{n!, 2^{\lfloor n^2/4 \rfloor}\}$.

Ideia: analisar o tamanho do maior clique de G.

Suponha que G possui um clique K de tamanho 8 ($\omega(G) \geq 8$).

Teorema principal

Teorema (Araújo–B.–Mota, 2020)

Se $n \geq 16$, *então* $D(n) \leq \max\{n!, 2^{\lfloor n^2/4 \rfloor}\}$.

Ideia: analisar o tamanho do maior clique de G.

Suponha que G possui um clique K de tamanho 8 ($\omega(G) \geq 8$).

Seja $G' = G - V(K)$. Temos que $D(G') \leq 2^{\lfloor (n-8)^2/4 \rfloor}$.

Teorema principal

Teorema (Araújo–B.–Mota, 2020)

Se $n \geq 16$, *então* $D(n) \leq \max\{n!, 2^{\lfloor n^2/4 \rfloor}\}$.

Ideia: analisar o tamanho do maior clique de G.

Suponha que G possui um clique K de tamanho 8 ($\omega(G) \geq 8$).

Seja $G' = G - V(K)$. Temos que $D(G') \leq 2^{\lfloor (n-8)^2/4 \rfloor}$.

Então temos

$$D(G) \leq 2^{16} \cdot 9^{n-8} \cdot D(G')$$

Teorema principal

Teorema (Araújo–B.–Mota, 2020)

Se $n \geq 16$, então $D(n) \leq \max\{n!, 2^{\lfloor n^2/4 \rfloor}\}$.

Ideia: analisar o tamanho do maior clique de G.

Suponha que G possui um clique K de tamanho 8 ($\omega(G) \geq 8$).

Seja $G' = G - V(K)$. Temos que $D(G') \leq 2^{\lfloor (n-8)^2/4 \rfloor}$.

Então temos

$$
\begin{aligned}
D(G) &\leq 2^{16} \cdot 9^{n-8} \cdot D(G') \\
&\leq 2^{16+(n-8)\log 9+\lfloor (n-8)^2/4 \rfloor}
\end{aligned}
$$

Teorema principal

Teorema (Araújo–B.–Mota, 2020)

Se $n \geq 16$, então $D(n) \leq \max\{n!, 2^{\lfloor n^2/4 \rfloor}\}$.

Ideia: analisar o tamanho do maior clique de G.

Suponha que G possui um clique K de tamanho 8 ($\omega(G) \geq 8$).

Seja $G' = G - V(K)$. Temos que $D(G') \leq 2^{\lfloor (n-8)^2/4 \rfloor}$.

Então temos

$$
\begin{aligned}
D(G) &\leq 2^{16} \cdot 9^{n-8} \cdot D(G') \\
&\leq 2^{16+(n-8)\log 9+\lfloor (n-8)^2/4 \rfloor} \\
&< 2^{\lfloor n^2/4 \rfloor}
\end{aligned}
$$

Teorema principal

Teorema principal

Então podemos supor $\omega(G) < 8$.

Teorema principal

Então podemos supor $\omega(G) < 8$.

Suponha que $r = \omega(G) \in \{5, 6, 7\}$,
e seja K um clique de tamanho r em G.

Teorema principal

Então podemos supor $\omega(G) < 8$.

Suponha que $r = \omega(G) \in \{5, 6, 7\}$,
e seja K um clique de tamanho r em G.

Seja $G' = G - V(K)$. Temos que $D(G') \leq 2^{\lfloor (n-r)^2/4 \rfloor}$.

Teorema principal

Então podemos supor $\omega(G) < 8$.

Suponha que $r = \omega(G) \in \{5, 6, 7\}$,
e seja K um clique de tamanho r em G.

Seja $G' = G - V(K)$. Temos que $D(G') \leq 2^{\lfloor (n-r)^2/4 \rfloor}$.

Então temos

$$D(G) \leq r! \cdot r^{n-r} \cdot D(G')$$

Teorema principal

Então podemos supor $\omega(G) < 8$.

Suponha que $r = \omega(G) \in \{5, 6, 7\}$,
e seja K um clique de tamanho r em G.

Seja $G' = G - V(K)$. Temos que $D(G') \leq 2^{\lfloor (n-r)^2/4 \rfloor}$.

Então temos

$$
\begin{aligned}
D(G) &\leq r! \cdot r^{n-r} \cdot D(G') \\
&\leq 2^{\sum_{i=1}^{r} \log i + (n-r) \log r + \lfloor (n-r)^2/4 \rfloor}
\end{aligned}
$$

Teorema principal

Então podemos supor $\omega(G) < 8$.

Suponha que $r = \omega(G) \in \{5, 6, 7\}$,
e seja K um clique de tamanho r em G.

Seja $G' = G - V(K)$. Temos que $D(G') \leq 2^{\lfloor (n-r)^2/4 \rfloor}$.

Então temos

$$\begin{aligned} D(G) &\leq r! \cdot r^{n-r} \cdot D(G') \\ &\leq 2^{\sum_{i=1}^{r} \log i + (n-r)\log r + \lfloor (n-r)^2/4 \rfloor} \\ &< 2^{\lfloor n^2/4 \rfloor} \end{aligned}$$

Teorema Principal

Teorema Principal

Então podemos supor $\omega(G) < 5$.

Teorema Principal

Então podemos supor $\omega(G) < 5$.

Suponha que $r = \omega(G) = 4$,
e seja K um clique de tamanho 4 em G.

Teorema Principal

Então podemos supor $\omega(G) < 5$.

Suponha que $r = \omega(G) = 4$,
e seja K um clique de tamanho 4 em G.

Seja $G' = G - V(K)$. Temos que $D(G') \leq 2^{\lfloor (n-4)^2/4 \rfloor}$.

Seja M um emparelhamento máximo em G'.

Teorema Principal

Então podemos supor $\omega(G) < 5$.

Suponha que $r = \omega(G) = 4$,
e seja K um clique de tamanho 4 em G.

Seja $G' = G - V(K)$. Temos que $D(G') \leq 2^{\lfloor (n-4)^2/4 \rfloor}$.

Seja M um emparelhamento máximo em G'.

Então temos

$$D(G) \leq 4! \cdot 4^{n-4-2|M|} \cdot 13^{|M|} \cdot D(G')$$

Teorema Principal

Então podemos supor $\omega(G) < 5$.

Suponha que $r = \omega(G) = 4$,
e seja K um clique de tamanho 4 em G.

Seja $G' = G - V(K)$. Temos que $D(G') \leq 2^{\lfloor (n-4)^2/4 \rfloor}$.

Seja M um emparelhamento máximo em G'.

Então temos

$$\begin{aligned} D(G) &\leq 4! \cdot 4^{n-4-2|M|} \cdot 13^{|M|} \cdot D(G') \\ &\leq 2^{24+2(n-4-2|M|)+|M|\log 13+\lfloor (n-4)^2/4 \rfloor} \end{aligned}$$

Teorema Principal

Então podemos supor $\omega(G) < 5$.

Suponha que $r = \omega(G) = 4$,
e seja K um clique de tamanho 4 em G.

Seja $G' = G - V(K)$. Temos que $D(G') \leq 2^{\lfloor (n-4)^2/4 \rfloor}$.

Seja M um emparelhamento máximo em G'.

Então temos

$$\begin{aligned} D(G) &\leq 4! \cdot 4^{n-4-2|M|} \cdot 13^{|M|} \cdot D(G') \\ &\leq 2^{24+2(n-4-2|M|)+|M|\log 13+\lfloor (n-4)^2/4 \rfloor} \\ &< 2^{\lfloor n^2/4 \rfloor} \end{aligned}$$

Teorema Principal

Teorema Principal

Então podemos supor $\omega(G) < 4$.

Teorema Principal

Então podemos supor $\omega(G) < 4$.

Caso $\omega(G) = 3$: parecido, mas bem mais trabalhoso

Teorema Principal

Então podemos supor $\omega(G) < 4$.

Caso $\omega(G) = 3$: parecido, mas bem mais trabalhoso

Caso $\omega(G) = 2$: Fácil

Teorema Principal

Então podemos supor $\omega(G) < 4$.

Caso $\omega(G) = 3$: parecido, mas bem mais trabalhoso

Caso $\omega(G) = 2$: Fácil

Mantel: $|E(G)| \leq \lfloor n^2/4 \rfloor$ e $|E(G)| = \lfloor n^2/4 \rfloor$ se e somente se G é o grafo bipartido balanceado completo.

Teorema Principal

Então podemos supor $\omega(G) < 4$.

Caso $\omega(G) = 3$: parecido, mas bem mais trabalhoso

Caso $\omega(G) = 2$: Fácil

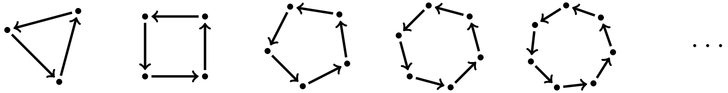
Mantel: $|E(G)| \leq \lfloor n^2/4 \rfloor$ e $|E(G)| = \lfloor n^2/4 \rfloor$ se e somente se G é o grafo bipartido balanceado completo.

Logo $D(G) \leq 2^{|E(G)|} \leq 2^{\lfloor n^2/4 \rfloor}$ e $D(G) = 2^{|E(G)|} = 2^{\lfloor n^2/4 \rfloor}$ se e somente se G é o grafo bipartido balanceado completo.

Problemas em aberto

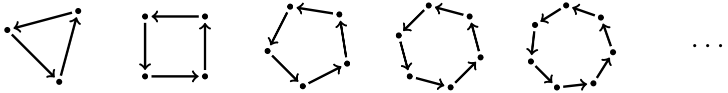
Problemas em aberto

Problema 1. Determinar $D(n, C_k^{\circlearrowright})$ para $k \geq 4$ e $n > 1$.

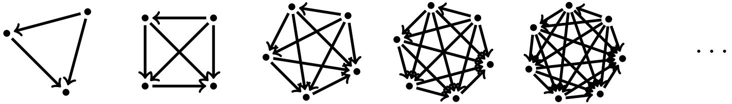


Problemas em aberto

Problema 1. Determinar $D(n, C_k^{\circlearrowright})$ para $k \geq 4$ e $n > 1$.



Problema 2. Determinar $D(n, K_k^{\rightarrow})$ para $k \geq 4$ e $n > 1$.



Counting graph orientations with no directed triangles

Fábio Botler

Universidade Federal do Rio de Janeiro

fbotler@cos.ufrj.br

`www.cos.ufrj.br/~fbotler`

com P. Araújo e G. O. Mota