A Vida Secreta das Bicliques

Marina Groshaus

André Guedes

UTFPR / UFPR

2020

Detetives parceiros

Os resultados apresentados sobre grafo biclique (sem citação) foram feitos por Marina Groshaus em co-autoria com:

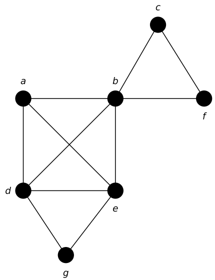
- Jayme Szwarcfiter
- André Guedes
- Juan Pablo Puppo
- Edmilson P. Cruz
- Leandro Montero

Era uma vez...uma Clique

- Uma clique de G é um subgrafo completo maximal

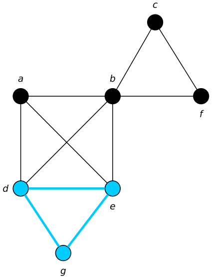
Era uma vez...uma Clique

- Uma clique de G é um subgrafo completo maximal



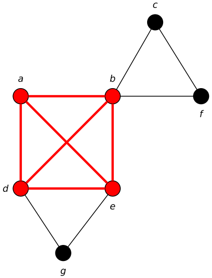
Era uma vez...uma Clique

- Uma clique de G é um subgrafo completo maximal



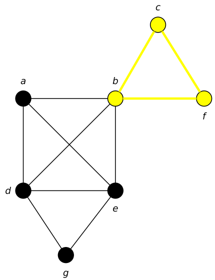
Era uma vez...uma Clique

- Uma clique de G é um subgrafo completo maximal

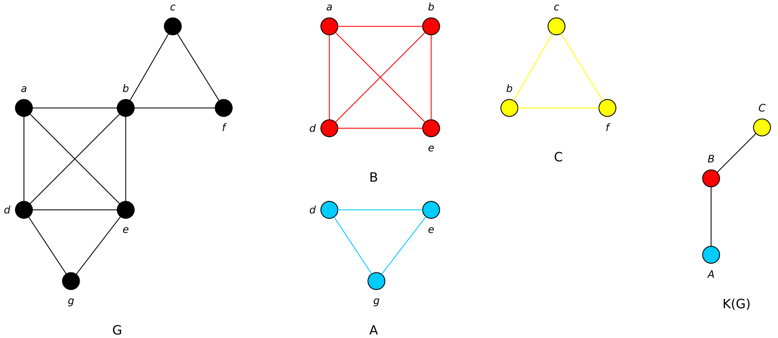


Era uma vez...uma Clique

- Uma clique de G é um subgrafo completo maximal



Clube do grafo clique



Clube do grafo clique

- Grafo clique $K(G)$: grafo de intersecção das cliques de um grafo [Hamelink, 1968]
- Caracterização [Roberts and Spencer, 1971]: Família de completos que cobrem arestas e verificam Helly
- Nova caracterização baseada em triângulos [Alcón and Gutierrez, 2003]

Clube do grafo clique

"Elite"

Bem difícil de entrar:

Clube do grafo clique

"Elite"

Bem difícil de entrar: NP-completo [Alcón et al., 2009]

Clube do grafo clique

"Elite"

Bem difícil de entrar: NP-completo [Alcón et al., 2009]

- K aplicado a classes de grafos
  - K(clique-Helly) = clique-Helly
  - K(cordal) = dualmente cordal
  - K(intervalos) = intervalos próprios.
  - Sem diamantes, split, cordais, desmanteláveis, arco- circulares, grafos self-clique, e-comparabilidade, e outros

Iterado

O que acontece com as sucessivas gerações do clube?

Iterado

O que acontece com as sucessivas gerações do clube?

- $K^{i+1}(G) = K(K^i(G))$.
- Convergência, divergência e periodicidade
  - Clique Helly, Cographs, P4-tidy graphs, circular-arc graphs, etc
  - Clique-divergência e clique-convergência: Decisão

.

Iterado

O que acontece com as sucessivas gerações do clube?

- $K^{i+1}(G) = K(K^i(G))$.
- Convergência, divergência e periodicidade
  - Clique Helly, Cographs, P4-tidy graphs, circular-arc graphs, etc
  - Clique-divergência e clique-convergência: Decisão

.

- Resultado recente: Menino difícil mesmo! [Cedillo and Pizaña, 2018].

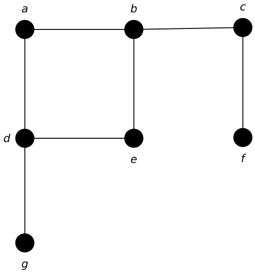
"Clique-divergence is not first-order expressible for the class of finite graphs"

E lá veio a Biclique

- Uma biclique em um grafo é um subgrafo induzido bipartido completo maximal

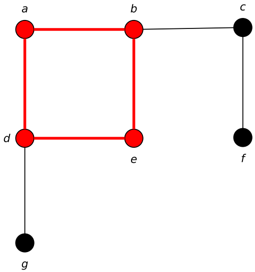
E lá veio a Biclique

- Uma biclique em um grafo é um subgrafo induzido bipartido completo maximal



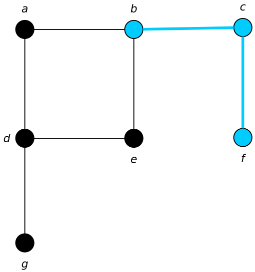
E lá veio a Biclique

- Uma biclique em um grafo é um subgrafo induzido bipartido completo maximal



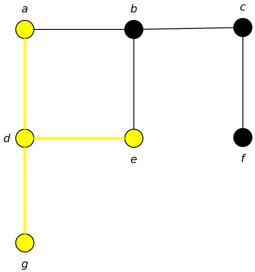
E lá veio a Biclique

- Uma biclique em um grafo é um subgrafo induzido bipartido completo maximal



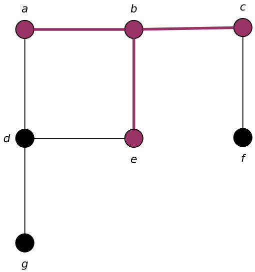
E lá veio a Biclique

- Uma biclique em um grafo é um subgrafo induzido bipartido completo maximal



E lá veio a Biclique

- Uma biclique em um grafo é um subgrafo induzido bipartido completo maximal



Briga de primos

- Biclique vs clique

Briga de primos

- Biclique vs clique

Briga de primos

- Biclique vs clique

- Complicado, criança nasce já difícil, não virou na barriga, nasceu pelos pés, cordão no pescoço etc

Briga de primos

- Biclique vs clique

- Complicado, criança nasce já difícil, não virou na barriga, nasceu pelos pés, cordão no pescoço etc

Relações entre bicliques

- Grafo biclique: Intersecção de bicliques, $KB(G)$

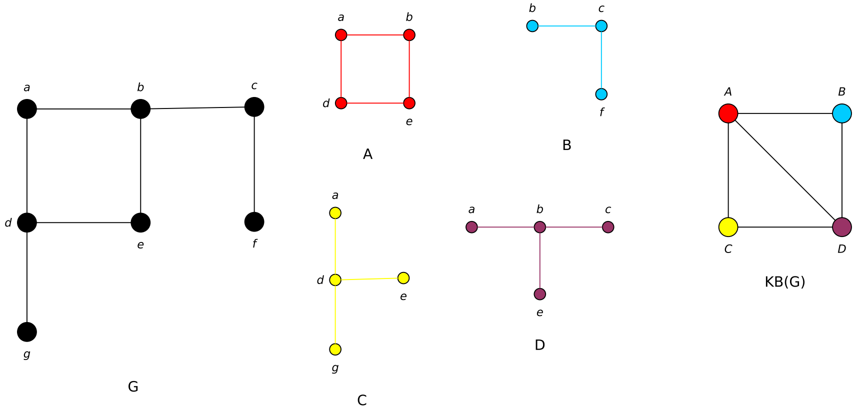
Relações entre bicliques

- Grafo biclique: Intersecção de bicliques, $KB(G)$
- Nasceu em 2006

Relações entre bicliques

- Grafo biclique: Intersecção de bicliques, $KB(G)$
- Nasceu em 2006
  (Sim, JAYME é o PAI)

Exemplo de KB



O que sabemos dele

- Como reconhecer?

O que sabemos dele

- Como reconhecer?
  Família de completos que cobre as arestas, separa vértices e verifica "bipartido Helly"

O que sabemos dele

- Como reconhecer?
  Família de completos que cobre as arestas, separa vértices e verifica "bipartido Helly"
- Está em NP
- Problema de reconhecimento em ABERTO

O que sabemos dele

- Como reconhecer?
  Família de completos que cobre as arestas, separa vértices e verifica "bipartido Helly"
- Está em NP
- Problema de reconhecimento em ABERTO
- Resultados sobre limitantes inferiores na quantidade de bicliques
- Quantidade de vértices de grau 2 menor que a metade dos vértices
- Se tem vértice de grau 2, posso eliminar e continua sendo KB [Montero, 2020]

Relações entre bicliques

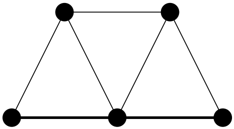
- Todo P_3 contido em uma gema ou diamante (estendido depois)

Relações entre bicliques

- Todo P_3 contido em uma gema ou diamante (estendido depois)

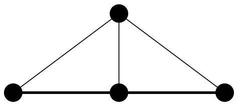
Relações entre bicliques

- Todo P_3 contido em uma gema ou diamante (estendido depois)



Relações entre bicliques

- Todo P_3 contido em uma gema ou diamante (estendido depois)



Prevendo o futuro! KB *iterado*

- A gente quer saber como vai se comportar ao longo da vida esta pestinha de biclique?

Prevendo o futuro! KB *iterado*

- A gente quer saber como vai se comportar ao longo da vida esta pestinha de biclique?
  Quanto gastarei em psicólogo?

Prevendo o futuro! KB *iterado*

- A gente quer saber como vai se comportar ao longo da vida esta pestinha de biclique?
  Quanto gastarei em psicólogo?

- Grafo biclique Iterado: $KB^{i+1}(G) = KB(KB^{i}(G))$.

Prevendo o futuro! KB iterado

- A gente quer saber como vai se comportar ao longo da vida esta pestinha de biclique?
  Quanto gastarei em psicólogo?

- Grafo biclique Iterado: $KB^{i+1}(G) = KB(KB^{i}(G))$.

  Tem jeito este menino?

Prevendo o futuro! KB *iterado*

- G diverge (incurável) se e somente se G, $KB(G)$ ou $KB^2(G)$ contém o K_5.

Prevendo o futuro! KB *iterado*

- G diverge (incurável) se e somente se G, $KB(G)$ ou $KB^2(G)$ contém o K_5.
  K_5 é o gene estragado!

Prevendo o futuro! KB *iterado*

- G diverge (incurável) se e somente se G, $KB(G)$ ou $KB^2(G)$ contém o K_5.
  K_5 é o gene estragado!
- Se converge, converge em até 3 passos.

Prevendo o futuro! KB *iterado*

- G diverge (incurável) se e somente se G, $KB(G)$ ou $KB^2(G)$ contém o K_5.
  K_5 é o gene estragado!
- Se converge, converge em até 3 passos.
- Converge a K_1 ou K_3

Vale a pena o investimento?

Vale a pena o investimento?

- Se tem mais de 13 vértices (sem gêmeos), diverge.

Vale a pena o investimento?

- Se tem mais de 13 vértices (sem gêmeos), diverge.
- Quase todo grafo diverge !!!!

Vale a pena o investimento?

- Se tem mais de 13 vértices (sem gêmeos), diverge.
- Quase todo grafo diverge !!!!
- Com probabilidade 1, teu menino vai ser incurável!

Vale a pena o investimento?

- Se tem mais de 13 vértices (sem gêmeos), diverge.
- Quase todo grafo diverge !!!!
- Com probabilidade 1, teu menino vai ser incurável!
- Algoritmo linear para decidir se converge ou diverge, ou seja, decidir se pagamos psicólogo ou não!

Está em todos nós

Está em todos nós

Qualquer um de nós pode virar grafo biclique!

Está em todos nós

Qualquer um de nós pode virar grafo biclique!

- Todo grafo H é subgrafo induzido de algum:
  - Grafo biclique de um grafo split
  - Grafo biclique de um grafo bipartido sem C_4 (estrelas)
  - Grafo clique

Relação com os amigos

- Dada uma classe $\mathcal{A}$, queremos saber quem é $KB(\mathcal{A})$
- Diferentes relações do operador KB com outros operadores

Bicliques $\rightarrow$ Cliques

Começando com o primo: Relação KB / K

Bicliques $\rightarrow$ Cliques

- "Funtor": $G \rightarrow G^2$

Bicliques $\rightarrow$ Cliques

- "Funtor": $G \rightarrow G^2$
- Bicliques $\rightarrow$ Cliques?

Bicliques $\rightarrow$ Cliques

- "Funtor": $G \rightarrow G^2$
- Bicliques $\rightarrow$ Cliques?
  Somente quando não tem K_3, C_5

Funtor - K *($\{K_3, C_5\}$-free)*

$$
\begin{tikzcd}
G \arrow[r] \arrow[d] & G^2 \arrow[d] \\
KB(G) \arrow[r, phantom, "\subseteq"] & K(G^2)
\end{tikzcd}
$$

Relação KB / K

- Igualdade: toda clique de G^2 vem de uma biclique?

Relação KB / K

- Igualdade: toda clique de G^2 vem de uma biclique?
  Somente quando é Open neighborhood Helly
  (Por exemplo, C_6-free)

Funtor - K ($\{K_3, C_5, C_6\}$-*free*)

$$\begin{tikzcd}
G \arrow[r] \arrow[d] & G^2 \arrow[d] \\
KB(G) \arrow[r, phantom, "="] & K(G^2)
\end{tikzcd}$$

Classes via "funtor"

- Problema: temos uma pré-imagem que seja quadrado da classe?

Funtor - K *(*$\{K_3, C_5, C_6\}$*-free)*

$$
\begin{tikzcd}
G \arrow[r] \arrow[d] & G^2 \arrow[d] \\
KB(G) \arrow[r, phantom, "="] & K(G^2)
\end{tikzcd}
$$

Exemplo de classes usando o funtor K

- Se G é bipartido cordal, então $KB(G)$ é cordal ou seus ciclos de longitude mínima (diferente de K_3) está contido numa roda

- G grafo bipartido cordal dominó-free. Então $KB(G)$ é dualmente cordal

- G Bi-intervalo Helly, $KB(G)$ é intervalo próprio

O quadrado e outras relações amigas: KB_m

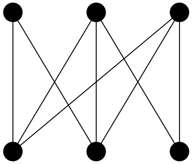
Relações mais "íntimas" entre as bicliques

- $KB_m(G)$: Grafo "intersecção mutuamente contida" das bicliques de G.

O quadrado e outras relações amigas: KB_m

Relações mais "íntimas" entre as bicliques

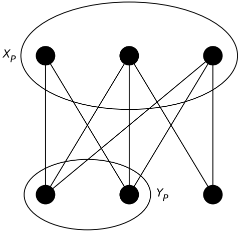
- $KB_m(G)$: Grafo "intersecção mutuamente contida" das bicliques de G.



O quadrado e outras relações amigas: KB_m

Relações mais "íntimas" entre as bicliques

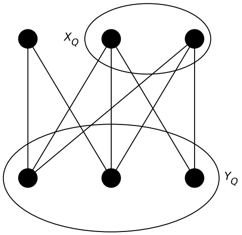
- $KB_m(G)$: Grafo "intersecção mutuamente contida" das bicliques de G.



O quadrado e outras relações amigas: KB_m

Relações mais "íntimas" entre as bicliques

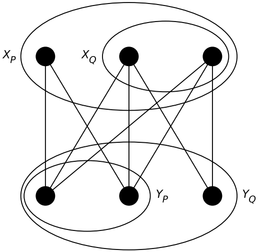
- $KB_m(G)$: Grafo "intersecção mutuamente contida" das bicliques de G.



O quadrado e outras relações amigas: KB_m

Relações mais "íntimas" entre as bicliques

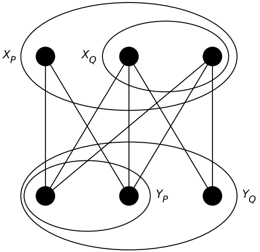
- $KB_m(G)$: Grafo "intersecção mutuamente contida" das bicliques de G.



O quadrado e outras relações amigas: KB_m

Relações mais "íntimas" entre as bicliques

- $KB_m(G)$: Grafo "intersecção mutuamente contida" das bicliques de G.

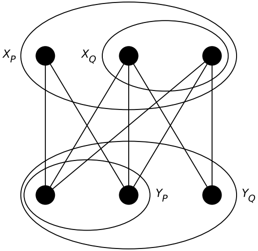


- $KB(G) = (KB_m(G))^2$ para G sem triângulos

O quadrado e outras relações amigas: KB_m

Relações mais "íntimas" entre as bicliques

- $KB_m(G)$: Grafo "intersecção mutuamente contida" das bicliques de G.



- $KB(G) = (KB_m(G))^2$ para G sem triângulos

TODO GRAFO BICLIQUE DE GRAFO SEM TRIÂNGULOS É GRAFO QUADRADO DE ALGUÉM

Funtor - KB_m (K_3-free)

$$\begin{array}{ccc} G & \longrightarrow & KB_m(G) \\ \downarrow & & \downarrow \\ KB(G) & = & (KB_m(G))^2 \end{array}$$

O quadrado e outras relações amigas

- Consequências: Herda propriedades do quadrado e facilita algumas provas:

O quadrado e outras relações amigas

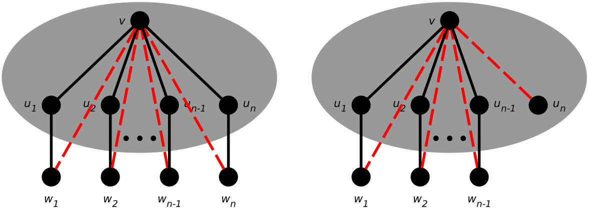
- Consequências: Herda propriedades do quadrado e facilita algumas provas:
  - O resultado: Todo P_3 está contido em diamante ou gema, estendemos:

O quadrado e outras relações amigas

- Consequências: Herda propriedades do quadrado e facilita algumas provas:
  - O resultado: Todo P_3 está contido em diamante ou gema, estendemos:
    - Toda estrela está contida em

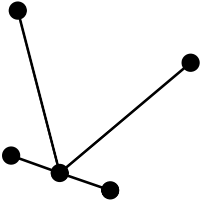
O quadrado e outras relações amigas

- Consequências: Herda propriedades do quadrado e facilita algumas provas:
  - O resultado: Todo P_3 está contido em diamante ou gema, estendemos:
    - Toda estrela está contida em



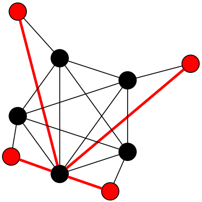
O quadrado e outras relações amigas

- Consequências: Herda propriedades do quadrado e facilita algumas provas:
  - O resultado: Todo P_3 está contido em diamante ou gema, estendemos:
    - Toda estrela está contida em



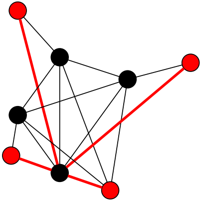
O quadrado e outras relações amigas

- Consequências: Herda propriedades do quadrado e facilita algumas provas:
  - O resultado: Todo P_3 está contido em diamante ou gema, estendemos:
    - Toda estrela está contida em



O quadrado e outras relações amigas

- Consequências: Herda propriedades do quadrado e facilita algumas provas:
  - O resultado: Todo P_3 está contido em diamante ou gema, estendemos:
    - Toda estrela está contida em



O quadrado e outras relações amigas

- Consequências: Herda propriedades do quadrado e facilita algumas provas:

O quadrado e outras relações amigas

- Consequências: Herda propriedades do quadrado e facilita algumas provas:
  - Número de vértices de grau 2 é menor ou igual a $n/2$

O quadrado e outras relações amigas

- Consequências: Herda propriedades do quadrado e facilita algumas provas:

  - Número de vértices de grau 2 é menor ou igual a $n/2$
    - Prova do caso geral é difícil

O quadrado e outras relações amigas

- Consequências: Herda propriedades do quadrado e facilita algumas provas:

  - Número de vértices de grau 2 é menor ou igual a $n/2$
    - Prova do caso geral é difícil
    - Fácil usando o quadrado

Exemplos de classes via KB_m

BIPARTIDOS

- KB_m(Bipartido) = IIC-comparabilidade (ordem e sua inversa dadas por contenção de conjuntos fechadas por intersecção)

Exemplos de classes via KB_m

BIPARTIDOS

- KB_m(Bipartido) = IIC-comparabilidade (ordem e sua inversa dadas por contenção de conjuntos fechadas por intersecção)
- KB(Bipartido) = (IIC-comparabilidade)^2

Exemplo de classes

- Se G é bi-intervalo (IBG), então $KB(G)$ é co-comparabilidade e $K_{1,4}$-free
  - P_3 é co-comparabilidade, mas não grafo biclique.
  - $KB_m(G)$ é co-comparabilidade, então $KB_m(G)$ é IIC-permutação,
  - $KB(IBG) \subseteq K_{1,4}$-free $\cap$ (IIC-permutação)^2

Funtor amigo conhecido de longa data

G bi-intervalo próprio (PIB)

- $S(G)$: grafo simplificado

Funtor amigo conhecido de longa data

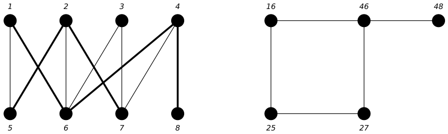
G bi-intervalo próprio (PIB)

- $S(G)$: grafo simplificado (de simples não tem nada!)

Funtor amigo conhecido de longa data

G bi-intervalo próprio (PIB)

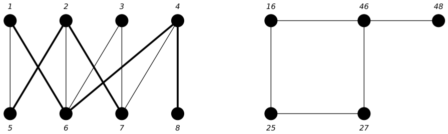
- $S(G)$: grafo simplificado (de simples não tem nada!)



Funtor amigo conhecido de longa data

G bi-intervalo próprio (PIB)

- $S(G)$: grafo simplificado (de simples não tem nada!)



Já que as bicliques estão nas arestas....Pedimos a ajuda do velho conhecido Grafo linha!!!

Funtor amigo conhecido de longa data

- $KB(G) = L(S(G))^2$

Funtor amigo conhecido de longa data

- $KB(G) = L(S(G))^2$
- $S(PIB) = PIB$

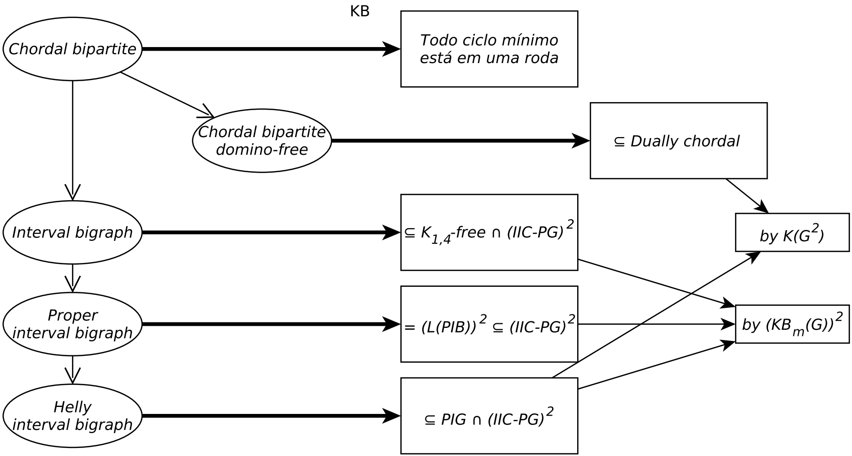
Funtor amigo conhecido de longa data

- $KB(G) = L(S(G))^2$
- $S(PIB) = PIB$
- $KB(PIB) = L(PIB)^2$

Funtor - $L(S(G))$ *(PIB)*

$$
\begin{tikzcd}
G \arrow[r] \arrow[d] & L(S(G)) \arrow[d] \\
KB(G) \arrow[r, phantom, "="] & (L(S(G)))^2
\end{tikzcd}
$$

Funtor - Classes



Grafos pós quarentena (cintura grande)

- G com cintura ≥ 5 ($= \{K_3, C_4\}$-free)
  - $KB(G)$: Remove vértices de grau 1 e eleva ao quadrado
  - Mais ainda, um grafo que é grafo quadrado de um grafo de cintura 5 ou mais, é grafo biclique de alguém de cintura 5 ou mais: Se a pre-imagem tem vértice de grau 1, adiciono mais um vértice de grau 1 a ele.
  - $KB(\mathcal{G}_k) = (\mathcal{G}_k)^2$, onde $\mathcal{G}_k$= Grafos com cintura de tamanho k, com k maior ou igual a 5.

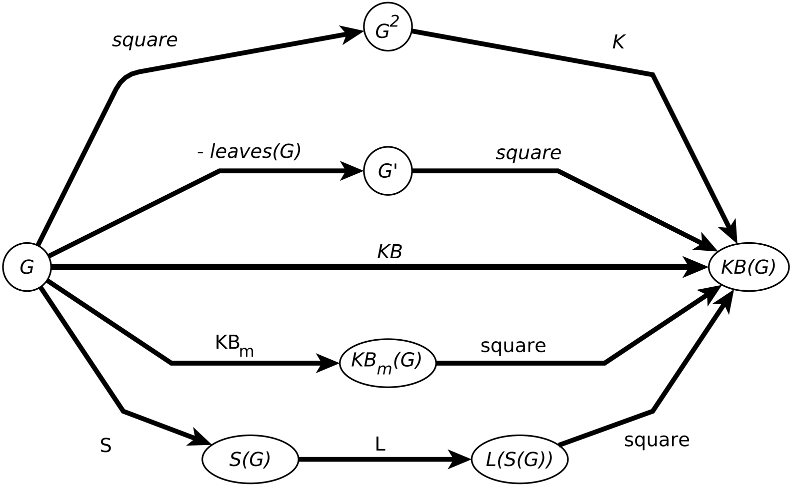
Funtor - cintura ≥ 5

$$\begin{tikzcd}
G \arrow[r] \arrow[d] & G\text{-}leaves(G) \arrow[d] \\
KB(G) \arrow[r, phantom, "="] & (G\text{-}leaves(G))^2
\end{tikzcd}$$

Voilà!

- Saber se G é quadrado de grafo de cintura ≥ 6 é polinomial
- Decidir se G é quadrado de grafo de cintura ≥ 5 é NP-completo? [Farzad and Karimi, 2012] (arXiv)!

Funtor - todos os amigos colaborando



Alguma classe um pouco mais comportada? Uma fácil por favor!

Alguma classe um pouco mais comportada? Uma fácil por favor!

- Split: K, S, $S(v)$, $v \in K$ são os satélites de v.
- Separável (SSG): Para cada $v \in K$, existe u tal que $S(v) \cap S(u) = \emptyset$.
- Aninhado (NSSG) : SSG e para todo par $u, v \in K$, se $S(u) \cap S(v) \neq \emptyset$, então $S(u) \subseteq S(v)$ ou $S(v) \subseteq S(u)$.

Alguma classe um pouco mais comportada? Uma fácil por favor!

- Split: K, S, $S(v)$, $v \in K$ são os satélites de v.
- Separável (SSG): Para cada $v \in K$, existe u tal que $S(v) \cap S(u) = \emptyset$.
- Aninhado (NSSG) : SSG e para todo par $u, v \in K$, se $S(u) \cap S(v) \neq \emptyset$, então $S(u) \subseteq S(v)$ ou $S(v) \subseteq S(u)$.
- Boa notícia!: Reconhecer $KB(NSSG)$ é polinomial!

Tabela classes - simples

class $\mathcal{A}$	$KB(G)$**,** $G \in \mathcal{A}$	**class** $KB(\mathcal{A})$	**complexity**
complete	$L(G)$	L(complete)	$\mathcal{P}$
tree	$(G - leaves(G))^2$	(tree)^2	$\mathcal{P}$ (linear)
path (P_n)	$\emptyset$, for $n = 1$ K_1, for $n = 2$ $(P_{n-2})^2$, for $n > 2$	(path)^2	$\mathcal{P}$ (linear)
caterpilar	$(G - leaves(G))^2$	(path)^2	$\mathcal{P}$ (linear)
cycle (C_n)	K_1, for $n = 4$ $(C_n)^2$, for $n \neq 4$	(cycle)$^2 - K_4 + K_1$	$\mathcal{P}$
$\mathcal{G}_k$, for $k \geq 5$	$(G - leaves(G))^2$	$(\mathcal{G}_k)^2$, for $k \geq 5$	$\mathcal{P}$, for $k \geq 6$ **OPEN**, for $k = 5$

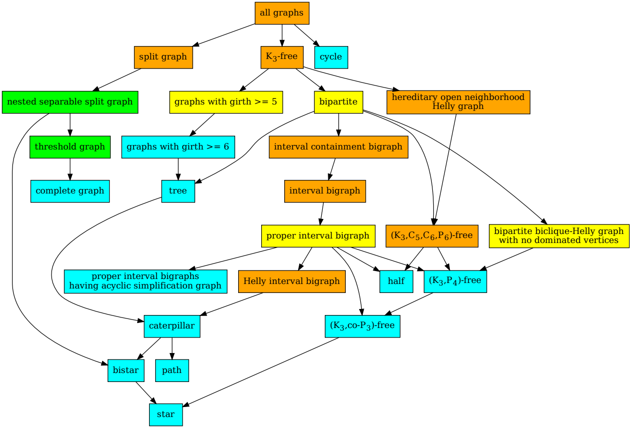
Tabela classes trabalhosas

class $\mathcal{A}$	$KB(G)$, $G \in \mathcal{A}$	**class** $KB(\mathcal{A})$	**complexity**
IBG	**OPEN**	$\subset$ (IIC-PG)^2 $\subset K_{1,4}$-free co-CG	**OPEN**
PIB	$(L(S(G))^2$	$(L(PIB))^2$	**OPEN**
PIB-ASG	$(L(S(G))^2$	1-*PIG*	$\mathcal{P}$
HIB	$K(G^2)$	$\subset PIG \cap (L(PIB))^2$	**OPEN**
$\{K_3, C_5, C_6\}$-free graphs	$K(G^2)$	**OPEN**	**OPEN**
BBHGDD	**OPEN**	*CHBDI*	**OPEN**
NSSG	**OPEN**	**OPEN**	$\mathcal{P}$
threshold graphs	**OPEN**	**OPEN**	$\mathcal{P}$
K_3-free graphs	$(KB_m(G))^2$	$\subset \mathcal{G}^2$	**OPEN**
bipartite	$(KB_m(G))^2$	$(IIC$-comparability$)^2$	**OPEN**
$\mathcal{G}$	**OPEN**	Characterization	**OPEN**

Vizinhos

- Intersecção de estrelas maximais: está em NP, caracterização Krauz type, biconexo etc. [Gomes et al., 2020]
- KB_e: intersecção de bicliques por arestas. Se G é bipartido, ele é grafo clique!
- KB_e iterado: para todo $k \geq 1$, existe um grafo que converge em k passos. [Legay and Montero, 2019]

Tabela classes



cyan	- total characterization with a polynomial algorithm
green	- no characterization but with a polynomial algorithm
yellow	- total characterization but not a polynomial algorithm
orange	- partial characterization but not a polynomial algorithm

Alcón, L. and Gutierrez, M. (2003).
A new characterization of clique graphs.
Mat. Contemp., 25:1–7.
The Latin-American Workshop on Cliques in Graphs (Rio de Janeiro, 2002).

Alcón, L., Faria, L., de Figueiredo, C. M., and Gutierrez, M. (2009).
The complexity of clique graph recognition.
Theoretical Computer Science, 410(21):2072–2083.

Bondy, A., Durán, G., Lin, M., and Szwarcfiter, J. (2003).
Self-clique graphs and matrix permutations.
Journal of Graph Theory, 44(3):178–192.

Cedillo, C. and Pizaña, M. (2018).
Clique-divergence is not first-order expressible for the class of finite graphs.
In *Proc. VIII Latin American Workshop on Cliques in Graphs*, page 74, Rio de Janeiro.

Cruz, E. P., Groshaus, M., and Guedes, A. L. P.
Unpublished notes.

Cruz, E. P., Groshaus, M., Guedes, A. L. P., and Puppo, J. P. (2020).
Biclique graphs of interval bigraphs.
Discrete Applied Mathematics, 281:134–143.

Durán, G. and Lin, M. C. (2001).
Clique graphs of helly circular-arc graphs.
Ars Combinatoria, 60:255–271.

Escalante, F. (1973).
Über iterierte Clique-Graphen.
Abhandlungender Mathematischen Seminar der University at Hamburg, 39:59–68.

Farzad, B. and Karimi, M. (2012).
Square-root finding problem in graphs, A complete dichotomy theorem.
CoRR, abs/1210.7684.

Farzad, B., Lau, L. C., Le, V. B., and Tuy, N. N. (2012).
Complexity of finding graph roots with girth conditions.
Algorithmica, 62(1-2):38–53.

Gomes, G. d. C. M., Groshaus, M., Lima, C. V. G. C., and dos Santos, V. F. (2020).
Intersection graph of maximal stars.
Discrete Applied Mathematics, 285:567–580.

Groshaus, M., Guedes, A., and Puppo, J. P. (2016a).
The biclique graph of a subclass of split graphs.
In *Latin American Workshop on cliques in graphs, La Plata, Argentina*, page 22.

Groshaus, M. and Guedes, A. L. P. (2020).
Biclique graphs of k_3-free graphs and bipartite graphs.
CoRR, abs/2006.00040.

Groshaus, M., Guedes, A. L. P., and Kolberg, F. S. (2020a).
On the helly subclasses of interval bigraphs and circular arc bigraphs.

In *Proceedings of the 14th Latin American Theoretical Informatics Symposium*, São Paulo.
Accepted.

Groshaus, M., Guedes, A. L. P., and Montero, L. (2016b).
Almost every graph is divergent under the biclique operator.
Discrete Applied Mathematics, 201:130–140.

Groshaus, M., Guedes, A. L. P., and Puppo, J. P. (2020b).
Biclique graphs of split graphs.
Submitted.

Groshaus, M. and Montero, L. (2013).
On the iterated biclique operator.
Journal of Graph Theory, 73(2):181–190.

Groshaus, M. and Montero, L. (2019).
Distances between bicliques and structural properties of bicliques in graphs.
ArXiv, abs/1708.09686.

Groshaus, M. and Szwarcfiter, J. (2008).
On hereditary helly classes of graphs.
Discrete Mathematics & Theoretical Computer Science, 10(1):71–78.

Groshaus, M. E. (2006).
Bicliques, cliques, neighborhoods y la propiedad de Helly.
PhD thesis, Universidad de Buenos Aires.

Groshaus, M. E. and Montero, L. P. (2009).
The number of convergent graphs under the biclique operator with no twin vertices is finite.
In *LAGOS'09 – V Latin-American Algorithms, Graphs and Optimization Symposium*, volume 35 of *Electron. Notes Discrete Math.*, pages 241–246. Elsevier Sci. B. V., Amsterdam.

Gutierrez, M. (1996).
Tree-clique graphs.
In Szwarcfiter, J. L., editor, *Workshop Internacional de Combinatoria*, pages 7–26.

Gutierrez, M. and Oubiña, L. (1995).
Minimum proper interval graphs.
Discrete Math. 142, 77–85.

Gutierrez, M. and Zucchello, R.
Grafos aci: Una generalización de los grafos de intervalos propios.
Manuscript.

Hamelink (1968).
A partial characterization of clique graphs.
J. Combin. Theory, (5):192–197.

Hedetniemi, S. T. and Slater, P. J. (1972).
Line graphs of triangleless graphs and iterated clique graphs.
In *Graph theory and applications (Proc. Conf., Western Michigan Univ., Kalamazoo, Mich., 1972; dedicated to the memory of J. W. T. Youngs)*, pages 139–147. Lecture Notes in Math., Vol. 303. Springer, Berlin.

Hedman, B. (1984).

Clique graphs of time graphs.
Journal of Combinatorial Theory, Series B, 37(3):270–278.

Larrión, F. and Neumann-Lara, V. (1997).
A family of clique divergent graphs with linear growth.
Graphs Combin., 13(3):263–266.

Larrion, F. and Neumann-Lara, V. (2002).
On clique divergent graphs with linear growth.
Discrete Math. 245 (1), 139–153.

Legay, S. and Montero, L. (2019).
On the iterated edge-biclique operator.
Electronic Notes in Theoretical Computer Science, 346:577–587.
The proceedings of Lagos 2019, the tenth Latin and American Algorithms, Graphs and Optimization Symposium (LAGOS 2019).

Lehot, P. G. H. (1974).
An Optimal Algorithm to Detect a Line Graph and Output Its Root Graph.

J. ACM, 21(4):569–575.

Lin, M., Soulignac, F., and Szwarcfiter, J. (2010).
The clique operator on circular-arc graphs.
Discrete Applied Mathematics 158 (12), 1259–1267.

Lin, Y.-L. and Skiena, S. S. (1995).
Algorithms for square roots of graphs.
SIAM Journal on Discrete Mathematics, 8(1):99–118.

Liu, D., Trajanovski, S., and Van Mieghem, P. (2015).
ILIGRA: An Efficient Inverse Line Graph Algorithm.
Journal of Mathematical Modelling and Algorithms in Operations Research, 14(1):13–33.

Montero, L. (2020).
Vertex removal in biclique graphs.
CoRR, abs/2006.04583.

Prisner, E. and Szwarcfiter, J. L. (1999).
Recognizing clique graphs of directed and rooted path graphs.

Discrete Applied Mathematics 94, 321–328.

Protti, F. (1998).
Classes de Grafos Clique Inversos.
PhD thesis, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, Brazil.

Protti, F. and Szwarcter, J. L. (2001).
Clique-inverse graphs of bipartite graphs.
Journal of Combinatorial Mathematics and Combinatorial Computing.

Protti, F. and Szwarficter, J. L. (2000).
Clique-inverse graphs of k 3 -free and k 4 -free graphs.
Journal of Graph Theory 35, 257–272.

Protti, F. and Szwarfiter, J. L. (2000).
On clique graphs of linear size.
Congressus Numerantium.

Roberts, F. and Spencer, J. (1971).
A characterization of clique graphs.

Journal of Combinatorial Theory B, 10(2):102–108.

Szwarcfiter, J. L. (2003).
A survey on clique graphs.
In Reed, B. A. and Sales, C. L., editors, *Recent Advances in Algorithms and Combinatorics*, pages 109–136. Springer New York, New York, NY.