Coloração módulo k

Coloração própria: $\forall v \in V$

Teorema (Vizing): $\Delta(G) \le \chi'(G) \le \Delta(G)+1$ ($\le 2\Delta - 1$)

G

$2(\Delta-1)$ pontas

Pyber '91:

col. própria $\longrightarrow$ $\chi_2'(G) \le \chi'(G)$ col. ímpar

---

Teorema (Pyber '91): $\chi_2'(G) \le 4 \quad \forall G$.

Prova 1: T $\quad S \subseteq V(G)$, $|S|$ par

$S = \{u_1, v_1, u_2, v_2, \dots, u_t, v_t\}$.

S-join $\quad T' \subseteq T$ floresta

$v \in S \iff v$ ímpar

$\chi_2'(G) \le 4$: i) $|V(G)|$ par: há uma quantidade par de vértices de grau par em G. Seja T' um S-join como acima. (S = grau par / grau ímpar em G)

$G - T'$ tem todos os graus ímpares

grau par em G $\quad$ 4

---

2 cores $\quad$ 3 cores

$G - T'$ ímpar $+$

$\chi_2'(G) \le 3$

Se $|V(G)|$ é par

Suponha que $|V(G)|$ é ímpar:

$G - v$ $\quad$ 3 cores $\quad$ v

i) Se $d(v)$ ímpar, G $\chi_2'(G-v) = 3$, pinte as arestas de v com 1 cor a mais

ii) Se $d(v)$ par...

$\chi'(G) \le 4$

Obs.: 4 é o melhor possível: família ∞

Por outro lado, para todo grafo conexo $\chi_2'(G)$ $\begin{cases} 2 & |V(G)| \\ 3 & \nmid |V(G)| \end{cases}$

Obs.: 5, 6 cores

$\chi'(G) \le 4$ $\forall$ mult. $\quad$ G conexo $\#$ finita

---

Prova 2: $\chi_2'(G) \le 5$, c

Seja $H \subseteq G$ maximal gerador ímpar ($d_H(v)$ ímpar ou 0 $\forall v \in V(H)$) $= V(G)$

$G - H$: floresta $\quad d_H(v) > 0$

A $\quad$ $k-1$ $\quad$ I $\quad$ B

i) floresta: $2 + 1 + 2 = 5$,

ii) $G - H$ é 2-deg ≤ 2

$v_1 \quad v_n$

Se G é 2-degenerado, então $\chi_2'(G) \le 10$

u $\quad$ v $\quad$ 10

u $\quad \ge 3$ $\quad \ge 3$ $\quad$ 8 $\quad 4 = |A|$ $\quad 4 = |B|$

$\chi_k' \le C k$

k $\quad$ $f(k)$-deg. $\quad$ 2-deg $\quad$ Ck

$\chi_k'(G) \le k+2$

$S = (1, k+1, 2k+1, 3k+1, \dots)$

$k \leftarrow k, n$

$k+1$ $\longrightarrow$ $S = (1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots)$