Contando orientações de $G(n, p)$ livres de $C_r^{\circlearrowright}$

joint with Guilherme Mota and Maurício Collares

March 24, 2021

- Dados G e $\vec{H}$ seja $D(G, \vec{H})$ o número de orientações livres de $\vec{H}$ de G.

- Dados G e $\vec{H}$ seja $D(G, \vec{H})$ o número de orientações livres de $\vec{H}$ de G.
- Erdős, 1974: quanto vale $D(n, \vec{H}) := \max\left\{D(G, \vec{H}) : |V(G)| = n\right\}$?

- Dados G e $\vec{H}$ seja $D(G,\vec{H})$ o número de orientações livres de $\vec{H}$ de G.
- Erdős, 1974: quanto vale $D(n,\vec{H}) := \max\left\{D(G,\vec{H}) : |V(G)| = n\right\}$?
- Alon, Yuster, 2006: $D(n, T_k) = 2^{\mathrm{ex}(n,K_k)}$ e $D(n, C_3^{\circlearrowright}) = 2^{\lfloor \frac{n^2}{4} \rfloor}$ para todo n grande o suficiente (extendido para todo n por Araújo, Botler, Mota)

- Dados G e $\vec{H}$ seja $D(G, \vec{H})$ o número de orientações livres de $\vec{H}$ de G.
- Erdős, 1974: quanto vale $D(n, \vec{H}) := \max\left\{D(G, \vec{H}) : |V(G)| = n\right\}$?
- Alon, Yuster, 2006: $D(n, T_k) = 2^{\mathrm{ex}(n,K_k)}$ e $D(n, C_3^{\circlearrowright}) = 2^{\lfloor \frac{n^2}{4} \rfloor}$ para todo n grande o suficiente (extendido para todo n por Araújo, Botler, Mota)
- Bucić, Sudakov, 2020: $D(n, C_{2k+1}^{\circlearrowright}) = 2^{\lfloor \frac{n^2}{4} \rfloor}$ para todo n grande o suficiente.

- Allen, Kohayakawa, Parente, Mota, 2014:
  $\log D(G(n,p), C^{\circlearrowright}_{\ell+2}) = o(pn^2)$ se $p \gg n^{-\ell/(\ell+1)}$.

- Allen, Kohayakawa, Parente, Mota, 2014: $\log D(G(n,p), C^{\circlearrowright}_{\ell+2}) = o(pn^2)$ se $p \gg n^{-\ell/(\ell+1)}$.

Theorem (Collares, Kohayakawa, Morris, Mota, 2018)

Se $p \gg n^{-1/2}$, então

$$\log D(G(n,p), C^{\circlearrowright}_3) = \widetilde{\Theta}\left(\frac{n}{p}\right)$$

com alta probabilidade quando $n \to \infty$.

- Allen, Kohayakawa, Parente, Mota, 2014: $\log D(G(n,p), C_{\ell+2}^{\circlearrowright}) = o(pn^2)$ se $p \gg n^{-\ell/(\ell+1)}$.

Theorem (Collares, Kohayakawa, Morris, Mota, 2018)

Se $p \gg n^{-1/2}$, então

$$\log D(G(n,p), C_3^{\circlearrowright}) = \widetilde{\Theta}\left(\frac{n}{p}\right)$$

com alta probabilidade quando $n \to \infty$.

- Eles também demonstram que $\log D(G(n,p), C_{\ell+2}^{\circlearrowright}) \geq \frac{cn}{p^{1/\ell}}$, quando $p \gg n^{-\ell/(\ell+1)}$, e $\log D(G(n,p), C_{\ell+2}^{\circlearrowright}) \leq \frac{Cn(\log n)^2}{p}$.

Theorem (C., Collares, Mota, 2021++)

Se $p \gg n^{-\ell/(\ell+1)}$, *então*

$$\log D(G(n,p), C_{\ell+2}^{\circlearrowright}) = \widetilde{\Theta}\left(\frac{n}{p^{1/\ell}}\right)$$

com alta probabilidade quando $n \to \infty$.

Cota inferior

- Divida os vértices de $G(n,p)$ em $c^{-1}p^{(\ell+1)/\ell}n$ conjuntos $V = V_1 \cup \ldots \cup V_{c^{-1}p^{(\ell+1)/\ell}n}$ de tamanho $\frac{c}{p^{(\ell+1)/\ell}}$.

Cota inferior

- Divida os vértices de $G(n,p)$ em $c^{-1}p^{(\ell+1)/\ell}n$ conjuntos $V = V_1 \cup \ldots \cup V_{c^{-1}p^{(\ell+1)/\ell}n}$ de tamanho $\frac{c}{p^{(\ell+1)/\ell}}$.
- Oriente as arestas entre V_i e V_j como indo de V_i para V_j se $i < j$.

Cota inferior

- Divida os vértices de $G(n,p)$ em $c^{-1}p^{(\ell+1)/\ell}n$ conjuntos $V = V_1 \cup \ldots \cup V_{c^{-1}p^{(\ell+1)/\ell}n}$ de tamanho $\frac{c}{p^{(\ell+1)/\ell}}$.
- Oriente as arestas entre V_i e V_j como indo de V_i para V_j se $i < j$.
- Qualquer cópia de $C_{\ell+2}^{\circlearrowright}$ deve estar contida em um V_i.

Cota inferior

- Divida os vértices de $G(n,p)$ em $c^{-1}p^{(\ell+1)/\ell}n$ conjuntos $V = V_1 \cup \ldots \cup V_{c^{-1}p^{(\ell+1)/\ell}n}$ de tamanho $\frac{c}{p^{(\ell+1)/\ell}}$.
- Oriente as arestas entre V_i e V_j como indo de V_i para V_j se $i < j$.
- Qualquer cópia de $C_{\ell+2}^{\circlearrowright}$ deve estar contida em um V_i.
- Com alta probabilidade existem $\frac{c'}{p^{(\ell+2)/\ell}}$ arestas que não estão em um $C_{\ell+2}$ in V_i

Demonstração para o caso de $C_3^{\circlearrowright}$

- Faremos indução orientando a vizinhança de um vértice por vez.

Demonstração para o caso de $C_3^{\circlearrowright}$

- Faremos indução orientando a vizinhança de um vértice por vez.
- Tome $T \subset N(v)$ minimal tal que sua orientação determina a orientação de $N(v)$.

Demonstração para o caso de $C_3^{\circlearrowright}$

- Faremos indução orientando a vizinhança de um vértice por vez.
- Tome $T \subset N(v)$ minimal tal que sua orientação determina a orientação de $N(v)$.
- Uma vez que a orientação é $C_3^{\circlearrowright}$-free T^+ and T^- são conjuntos independentes em G

Demonstração para o caso de $C_3^{\circlearrowright}$

- Faremos indução orientando a vizinhança de um vértice por vez.
- Tome $T \subset N(v)$ minimal tal que sua orientação determina a orientação de $N(v)$.
- Uma vez que a orientação é $C_3^{\circlearrowright}$-free T^+ and T^- são conjuntos independentes em G. Então o número de orientações de $N(v)$ e no máximo

$$\binom{n}{\leq \alpha(G)}^2.$$

Demonstração para o caso de $C_3^{\circlearrowright}$

- Faremos indução orientando a vizinhança de um vértice por vez.

- Tome $T \subset N(v)$ minimal tal que sua orientação determina a orientação de $N(v)$.

- Uma vez que a orientação é $C_3^{\circlearrowright}$-free T^+ and T^- são conjuntos independentes em G. Então o número de orientações de $N(v)$ e no máximo

$$\binom{n}{\leq \alpha(G)}^2.$$

- $\alpha(G(n,p)) \leq 3 \log n/p$ com alta probabilidade.

Como generalizar para $C_{\ell+2}^{\circlearrowright}$

- Precisamos usar mais da aleatoriedade de $G(n, p)$ então calculamos o número esperado de extensões.

Como generalizar para $C^{\circlearrowright}_{\ell+2}$

- Precisamos usar mais da aleatoriedade de $G(n,p)$ então calculamos o número esperado de extensões.
- Se o grafo tem muitos $\vec{P}_\ell$ aplicamos uma estratégia parecida.

Como generalizar para $C_{\ell+2}^{\circlearrowright}$

- Precisamos usar mais da aleatoriedade de $G(n,p)$ então calculamos o número esperado de extensões.
- Se o grafo tem muitos $\vec{P}_\ell$ aplicamos uma estratégia parecida.
- Nós aplicamos containers para grafos nesse caso.

Como generalizar para $C_{\ell+2}^{\circlearrowright}$

- Precisamos usar mais da aleatoriedade de $G(n, p)$ então calculamos o número esperado de extensões.
- Se o grafo tem muitos $\vec{P}_\ell$ aplicamos uma estratégia parecida.
- Nós aplicamos containers para grafos nesse caso.
- Mostramos que tem poucas orientações com muitos $\vec{P}_{r-1}$ mas poucos $\vec{P}_r$.

Obrigado!