

# CÁLCULO DE MAPAS DE REFLECTÂNCIA EM MODELOS DIGITAIS DE TERRENOS

WILLIAM R. SCHWARTZ  
HÉLIO PEDRINI

Universidade Federal do Paraná - UFPR  
Departamento de Informática, Curitiba-PR, Brasil  
william@pet.inf.ufpr.br helio@inf.ufpr.br

---

**RESUMO** - Este trabalho descreve um método para cálculo de mapas de reflectância a partir de modelos digitais de terrenos. O mapa de reflectância é resultado da combinação entre a iluminação da superfície, de sua reflectância e orientação em relação à fonte de luz. Tal mapa especifica o brilho de um elemento da superfície com uma orientação particular para uma dada distribuição de iluminação. O brilho resultante de um ponto da superfície é definido como a quantidade de energia que incide no ponto e da fração dessa quantidade que é refletida pela superfície. A quantidade de energia incidente em um ponto é determinada pela sua posição em relação à fonte de luz. A fração de energia refletida depende das propriedades ópticas da superfície. Tal formulação pode ser simplificada considerando-se somente a reflexão difusa, conhecida como reflexão Lambertiana.

**ABSTRACT** - This work describes a method for calculation of reflectance maps from digital terrain models. The map of reflectance is resulted of the combination among the illumination of the surface, of its reflectance and orientation in relation to the light source. Such map specifies the brightness of an element of the surface with a particular orientation for a given illumination distribution. The resultant brightness of a point of the surface is defined as the amount of energy that falling on patch of the surface and of the fraction of this amount that is reflected by the surface. The amount of incident energy in a point is determined by its position in relation to the light source. The fraction of reflected energy depends on the optic properties of the surface. Such formulation can be simplified considering only the diffuse reflection, known as Lambertiana reflection.

---

## 1 INTRODUÇÃO

Técnicas para geração de mapas de reflectância facilitam a compreensão da topologia do terreno através da simulação de raios solares incidindo sobre sua superfície. A topografia de uma área, expressa como elevação, magnitude e orientação da declividade, cria variações na radiação solar incidente sobre a terra, afetando processos biofísicos tais como aquecimento do solo e do ar, evaporação da água, dentre outros.

A representação da topografia do terreno é realizada através do posicionamento de uma fonte de luz que visa simular a incidência de raios solares sobre a superfície. O mapa de reflectância é resultado da combinação entre os seguintes fatores: a iluminação da superfície, de sua reflectância e orientação em relação à fonte de luz JAIN (1994). Tal mapa especifica o brilho de um elemento da superfície com uma orientação particular para uma dada distribuição de iluminação.

O brilho resultante de um ponto da imagem é definido como a quantidade de energia que incide no ponto e da fração dessa quantidade que é refletida pela superfície. A

quantidade de energia que incide em um ponto é determinada pela sua posição em relação à fonte de luz. A fração de energia que é refletida depende das propriedades ópticas da superfície.

Nas próximas seções, será apresentada uma formulação para determinar a quantidade de energia que reflete em uma superfície iluminada por uma única fonte de iluminação. Serão também apresentados os principais aspectos relativos à energia refletida em superfícies seguindo a lei do cosseno de Lambert, bem como o cálculo de mapas de reflectância para estas superfícies.

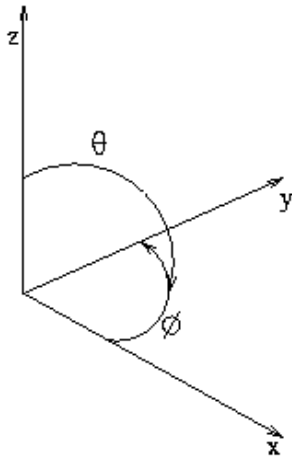
## 2 FORMAÇÃO DA IMAGEM

A intensidade de um elemento da superfície do terreno é determinada pela quantidade de energia refletida pela superfície. A quantidade de energia refletida depende da quantidade de energia incidente e da fração desta que é refletida. A primeira é determinada pela posição da superfície em relação às fontes de iluminação e a segunda depende das propriedades ópticas da superfície.

Estabelecendo o sistema de coordenadas esférico

---

conforme a figura 1, onde  $0 \leq \phi < 2\pi$  e  $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ , o hemisfério  $\epsilon$  formado por todas as possibilidades de variação de  $\phi$  e  $\theta$  indica as possíveis direções a partir das quais a energia incide na superfície.



**Figura 1** - Definição dos ângulos  $\theta_o$  e  $\phi_o$ , em coordenadas esféricas, para localização da fonte de energia.

Utilizando coordenadas esféricas, a energia incide a partir da direção  $(\theta_i, \phi_i)$  e é refletida para  $(\theta_e, \phi_e)$ . A relação entre a quantidade de energia incidente  $E(\theta_i, \phi_i)$  e a quantidade de energia refletida  $L(\theta_e, \phi_e)$  pela superfície é dada pela equação 1.

$$L(\theta_e, \phi_e) = f(\theta_i, \phi_i, \theta_e, \phi_e)E(\theta_i, \phi_i) \quad (1)$$

O termo  $f(\theta_i, \phi_i, \theta_e, \phi_e)$ , chamado de função de distribuição de reflectância bidirecional (FDRB), indica a fração de energia incidente que será refletida para direção  $(\theta_e, \phi_e)$  e depende das propriedades ópticas do material do qual a superfície é composta.

Uma seção do hemisfério  $\epsilon$  com incremento angular  $\delta\theta_i$  e  $\delta\phi_i$  cobre uma área  $\delta w$  desse hemisfério chamado *ângulo sólido*, conforme equação 2.

$$\delta w = \sin \theta_i \delta\theta_i \delta\phi_i \quad (2)$$

O total de energia incidente na superfície,  $E(\theta_i, \phi_i)$ , é definido pela soma das superfícies do hemisfério  $\epsilon$  ponderado pela quantidade de energia proveniente da direção de cada ângulo sólido, dado pela equação 3, onde  $I(\theta_i, \phi_i)$  é a quantidade de energia para cada ângulo sólido emitida na direção  $(\theta_i, \phi_i)$ .

$$E(\theta_i, \phi_i) = \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} I(\theta_i, \phi_i) \sin \theta_i \cos \theta_i d\theta_i d\phi_i \quad (3)$$

Para uma superfície qualquer, o total de energia refletida dependendo da quantidade  $I(\theta_i, \phi_i)$  de energia in-

cidente e de suas propriedades ópticas  $f(\theta_i, \phi_i, \theta_e, \phi_e)$  é dado pela equação 4.

$$L(\theta_e, \phi_e) = \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\theta_i, \phi_i, \theta_e, \phi_e) \cdot I(\theta_i, \phi_i) \cdot \sin \theta_i \cdot \cos \theta_i \cdot d\theta_i \cdot d\phi_i \quad (4)$$

### 3 CÁLCULO DO VETOR NORMAL

O vetor normal de um elemento da superfície é perpendicular ao plano formado por esse elemento. A obtenção do vetor normal é dada através do produto externo entre dois vetores linearmente independentes contidos no plano da superfície.

Para determinação dos dois vetores, inicialmente são calculadas as derivadas parciais em relação a  $x$  e  $y$  da superfície,  $p = \frac{\partial z}{\partial x}$  e  $q = \frac{\partial z}{\partial y}$ . Através dessas duas derivadas parciais obtém-se os vetores  $(1, 0, p)$  e  $(0, 1, q)$ . O produto externo desses dois vetores resulta no vetor normal, conforme mostrado na equação 5.

$$N = (1, 0, p) \times (0, 1, q) = (-p, -q, 1) \quad (5)$$

### 4 CÁLCULO DAS DERIVADAS PARCIAIS

A maneira mais simples de estimar as derivadas parciais emprega o método das diferenças finitas, o qual utiliza quatro ou oito células vizinhas dentro de uma janela centrada em um ponto sob investigação.

Um método da diferença finita de segunda ordem foi proposta por FLEMING (1979)

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{z_{i+1,j} - z_{i-1,j}}{2\Delta x} \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{z_{i,j+1} - z_{i,j-1}}{2\Delta y} \quad (6)$$

onde  $\Delta x$  e  $\Delta y$  são os espaçamentos entre os pontos na direção horizontal e vertical, respectivamente.

Um método da diferença finita de terceira ordem foi proposta por SHARPNACK (1969), onde a inclinação é definida por

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{(z_{i+1,j+1} + z_{i+1,j} + z_{i+1,j-1})}{6\Delta x} \\ &\quad - \frac{(z_{i-1,j+1} + z_{i-1,j} + z_{i-1,j-1})}{6\Delta x} \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= \frac{(z_{i+1,j+1} + z_{i,j+1} + z_{i-1,j+1})}{6\Delta y} \\ &\quad - \frac{(z_{i+1,j-1} + z_{i,j-1} + z_{i-1,j-1})}{6\Delta y} \end{aligned} \quad (7)$$

Em HORN (1981), foi apresentado uma versão modificada do método de SHARPNACK (1969) usando pesos

diferentes para os valores de elevação mais próximos

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{(z_{i+1,j+1} + 2z_{i+1,j} + z_{i+1,j-1}) - (z_{i-1,j+1} + 2z_{i-1,j} + z_{i-1,j-1})}{8\Delta x}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{(z_{i+1,j+1} + 2z_{i,j+1} + z_{i-1,j+1}) - (z_{i+1,j-1} + 2z_{i,j-1} + z_{i-1,j-1})}{8\Delta y}$$
(8)

Em SKIDMORE (1989) e HODGSON (1995), foram comparados vários métodos, incluindo os descritos acima, sugerindo que o proposto por Horn resulta em boa precisão sem requerer alto tempo de CPU.

## 5 REFLEXÃO LAMBERTIANA

A reflexão Lambertiana, também conhecida como reflexão difusa, desconsidera a absorção de energia pela superfície, tal que o brilho apresenta-se igual para todas as direções e segue a lei do cosseno de Lambert, a qual diz que o brilho em um elemento iluminado varia de acordo com o ângulo de incidência da luz e a direção do vetor normal neste elemento. O FDRB para a reflexão Lambertiana é definida pela equação 9.

$$f(\theta_i, \phi_i, \theta_e, \phi_e) = \frac{1}{\pi}$$
(9)

No caso da existência de uma única fonte de energia distante na direção  $(\theta_s, \phi_s)$  em relação ao vetor normal da superfície, a quantidade de energia emitida é determinada pela equação 10. As funções  $\delta$  são utilizadas para restringir a direção a partir da qual a energia incide na superfície e  $I_0$  é o total de energia emitida pela fonte.

$$I(\theta_i, \phi_i) = I_0 \frac{\delta(\theta_i - \theta_s) \delta(\phi_i - \phi_s)}{\sin \theta_i}$$
(10)

Substituindo as equações 9 e 10 na equação 4, obtém-se a quantidade de energia refletida quando utilizada a reflexão Lambertiana. O resultado é mostrado pela equação 11, onde  $\theta_s$  é o ângulo formado entre a normal da superfície e o vetor direcional da fonte de energia.

$$L(\theta_e, \phi_e) = \frac{I_0}{\pi} \cos \theta_s$$
(11)

O vetor direcional da fonte de energia,  $S$ , é dado por  $(-p_o, -q_o, 1)$  e  $p_o$  e  $q_o$  são dados pela equação 12, onde  $\phi_o$  e  $\theta_o$  são os ângulos da direção da fonte de energia, conforme a figura 1.

$$p_o = -\cos \phi_o \tan \theta_o$$

$$q_o = -\sin \phi_o \tan \theta_o$$
(12)

## 6 CÁLCULO DE MAPAS DE REFLECTÂNCIA COM REFLEXÃO LAMBERTIANA

O mapa de reflectância é o resultado da combinação entre os seguintes fatores: a iluminação da superfície, de sua reflectância e orientação em relação à fonte de energia HORN (1981). Tal mapa especifica o brilho de um elemento da superfície com uma orientação particular para uma dada distribuição de iluminação.

A teoria desenvolvida nas seções anteriores possibilita o cálculo do mapa de reflectância para superfícies com reflexão Lambertiana e com uma única fonte de energia.

O mapa de reflectância é uma função  $R(p, q)$  dependente das derivadas parciais  $p$  e  $q$ . Com o objetivo de fazer com que a equação 11 dependa dessas derivadas parciais, utiliza-se o produto interno dos vetores  $N$  e  $S$  para obter o  $\cos \theta_s$ , conforme mostrado pela equação 13.

$$\cos \theta_s = \frac{1 + p_o p + q_o q}{\sqrt{1 + p^2 + q^2} \sqrt{1 + p_o^2 + q_o^2}}$$
(13)

O total de iluminação  $I_0$  é constante, então  $R(p, q)$  para cada elemento da superfície pode ser escrito conforme a equação 14.

$$R(p, q) = \frac{1 + p_o p + q_o q}{\sqrt{1 + p^2 + q^2} \sqrt{1 + p_o^2 + q_o^2}}$$
(14)

A substituição da equação 12 em 14 resulta em uma equação que depende de  $p$  e  $q$  e dos ângulos  $\phi_o$  e  $\theta_o$  que são fixos, pois existe somente uma fonte de energia.

Em um modelo digital de terreno, para cada posição  $(x, y)$  calcula-se as derivadas parciais  $p$  e  $q$ , conforme os métodos descritos na seção 4.

Um resultado obtido com o cálculo de mapas de reflectância é mostrado na figura 2. Foi utilizado  $\phi_o = 135^\circ$  e  $\theta_o = 45^\circ$ , valores normalmente utilizados na área de cartografia.

## 7 CONCLUSÕES

Este trabalho reuniu a teoria sobre o cálculo de mapas de reflectância para superfícies Lambertianas, possibilitando a aplicação direta do método em modelos digitais de terrenos.

## REFERÊNCIAS

- FLEMING, M. D. Machine processing of Landsat MSS data and DMA topographic data for forest cover type mapping. Laboratory for Applications of Remote Sensing, Purdue University, West Lafayette, Indiana, USA, 1979. LARS Technical Report 062879.
- HODGSON, M. E. What cell size does the compute slope/aspect angle represent? **Photogrammetric Engineering and Remote Sensing**, [S.l.], v.61, n.5, p.513-517, Maio, 1995.

HORN, B. K. P. Hill Shading and the Reflectance Map. **Proceedings of the IEEE**, [S.l.], v.69, n.1, p.14-47, Janeiro, 1981.

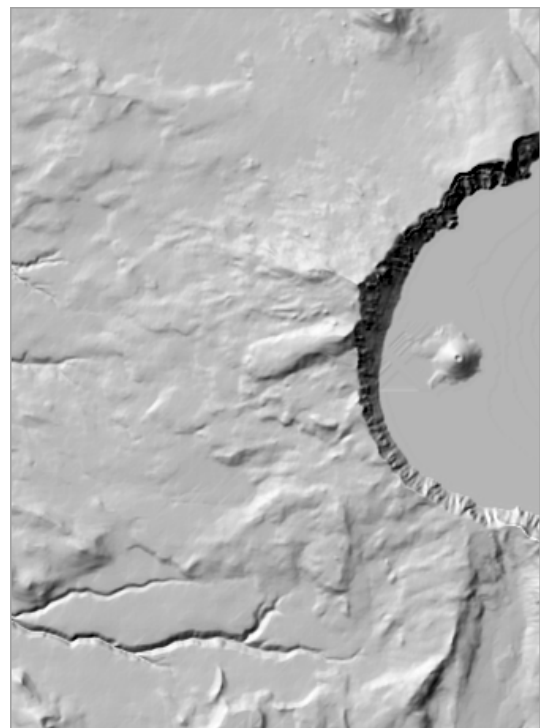
JAIN, R.; KASTURI, R. **Machine Vision**. McGraw-Hill Companies, Dezembro, 1994.

SHARPBACK, D. A. An algorithm for computing slope and aspect from elevations. **Photogrammetric Engineering**, [S.l.], v.35, n.3, p.247-248, Março, 1969.

SKIDMORE, A. K. A comparison of techniques for calculating gradient and aspect from a gridded digital elevation model. **International Journal of Geographical Information Systems**, [S.l.], v.3, n.4, p.323-334, Outubro/Dezembro, 1989.



(a)



(b)

**Figura 2** - Cálculo do mapa de reflectância sobre a imagem Crater Lake. (a) imagem original; (b) resultado obtido com  $\theta_o = 45^\circ$  e  $\phi_o = 135^\circ$ .