

REPRESENTAÇÃO DE SUPERFÍCIES DE TERRENOS ATRAVÉS DE APROXIMAÇÕES QUADRÁTICAS E CÚBICAS

OLIVER M. VAN KAICK
WILLIAM R. SCHWARTZ
MURILO V. G. DA SILVA
HÉLIO PEDRINI

Universidade Federal do Paraná - UFPR
Departamento de Informática, Curitiba-PR, Brasil
{oliver,william,murilo}@pet.inf.ufpr.br {helio}@inf.ufpr.br

RESUMO - O problema de aproximação de superfícies é encontrado em diversas aplicações práticas. Este artigo descreve um método automático para construção de superfícies de terrenos definidas por meio de uma malha de triângulos curvos. Inicialmente, o método constrói uma malha que aproxima a superfície sobre a fronteira do domínio e, iterativamente, adiciona novos pontos de dados à triangulação até que uma determinada tolerância de erro seja obtida. Superfícies suaves definidas através de polinômios são construídas sobre essa malha inicial de triângulos. Diversas amostras de terrenos são utilizadas para demonstrar o desempenho do método proposto.

ABSTRACT - Surface approximation is an important problem found in a variety of practical applications. This paper describes an automatic method for constructing smooth terrain surfaces defined as a network of curved triangular patches. The method starts with a coarse mesh approximating the surface through triangular elements covering the boundary of the domain, then iteratively adds new points from the data set until a specified error tolerance is achieved. Once this initial triangulation has been generated, smooth surfaces are constructed over the triangular mesh. The resulting surface is represented by piecewise polynomial patches possessing C^1 continuity. Several real terrain data sets have been used to demonstrate the performance of the method.

1 INTRODUÇÃO

Um método comum para aproximação de superfícies de terrenos utiliza uma malha regular retangular, a qual armazena pontos de elevação em intervalos uniformes. A grande desvantagem desta representação é a sua inerente invariabilidade espacial, visto que a estrutura não é adaptativa às irregularidades dos dados. Alternativamente, malhas triangulares usam estruturas irregulares para armazenar os pontos de elevação, de maneira que a estrutura da malha possa ser ajustada para refletir a densidade dos dados.

Superfícies poligonais são freqüentemente utilizadas para representar superfícies de terrenos e são suportadas por inúmeros pacotes gráficos, tais como OpenGL, VRML, VTK, e Data Explorer. Além disso, suporte para visualização de polígonos em hardware tem-se tornado cada vez mais comum. Apesar desta aproximação linear ser simples e rápida, a generalização para superfícies suaves é uma extensão muitas vezes necessária. Certas porções dos terrenos podem apresentar regiões de alta curvatura, tal que a utilização da aproximação linear (superfícies com continuidade C^0) pode requerer um grande número de

triângulos. Nestes casos, a aproximação por superfícies suaves proporciona uma representação mais precisa e compacta. Além disso, para propósitos de visualização, a utilização de superfícies suaves reduz certos problemas visuais, por exemplo, a presença de *Mach Bands* sobre as bordas.

Com base nas considerações acima, este trabalho descreve um procedimento automático para a construção de superfícies suaves definida como uma malha de triângulos curvos. A superfície aproximada é representada por uma superfície Bézier triangular com continuidade C^1 .

O primeiro passo de nosso método é gerar uma aproximação linear inicial da superfície, através da criação de elementos triangulares em determinados pontos de elevação. O algoritmo inicia com uma triangulação contendo apenas duas faces triangulares cobrindo a borda do terreno e, iterativamente, vai adicionando novos pontos a partir dos dados de elevação, até que uma tolerância de erro pré-determinada seja alcançada. A superfície resultante é formada por um conjunto contínuo de triângulos C^0 .

A triangulação de Delaunay é utilizada para construir a malha triangular, gerando uma triangulação que ma-

ximiza o ângulo mínimo de todos os triângulos. Isto ajuda a reduzir a ocorrência de triângulos finos e longos, uma vez que estes podem levar a comportamentos indesejáveis, afetando a estabilidade numérica e produzindo artefatos visuais.

Uma vez que a triangulação inicial tenha sido gerada, as superfícies curvas podem ser construídas sobre a malha triangular, utilizando funções polinomiais contínuas. O método utiliza polinômios quadráticos e cúbicos para construir as superfícies C^1 .

Na abordagem utilizando polinômios quadráticos, cada triângulo é subdividido em seis subtriângulos, utilizando o modelo de POWELL (1977). Na abordagem cúbica, cada triângulo é subdividido em três subtriângulos, segundo o modelo de QUAK (1990).

Após cada triângulo ter sido subdividido, um polinômio de Bernstein de grau n , definido em termos de coordenadas baricêntricas, é aplicado a cada subtriângulo. Determinadas condições de continuidade devem ser satisfeitas nas adjacências dos triângulos para que toda a superfície seja suave. O método utiliza apenas os valores de elevação dos pontos e as derivadas nos vértices da triangulação, tal que a abordagem é relativamente simples de implementar.

Várias amostras de terrenos são utilizadas para demonstrar a eficácia do método proposto. Tabelas comparativas apresentam os resultados obtidos para representar as superfícies de terrenos utilizando as aproximações linear, quadrática e cúbica.

Os resultados mostram que os métodos de aproximação linear, quadrática e cúbica apresentam medidas de erro semelhantes, entretanto, a utilização de superfícies suaves é mais adequada em termos visuais.

2 APROXIMAÇÃO DE SUPERFÍCIES

Modelos polinomiais são uma alternativa comum aos modelos de superfícies poligonais. Utilizando-se polinômios de alta ordem, superfícies suaves podem ser aproximadas de forma mais precisa que polígonos planares. Um modelo composto de elementos polinomiais discretiza o domínio espacial em um conjunto fixo de elementos de superfícies. Para certas aplicações, entretanto, esse conjunto fixo pode não ser apropriado. Vários métodos adaptativos têm sido desenvolvidos, tais como superfícies de subdivisão CATMULL (1978), DOO (1978), LOOP (1987), *splines* hierárquicas FORSEY (1995) e modelos compostos por elementos triangulares FARIN (1992), LAWSON (1977).

Em 1974, CHAIKIN (1974) apresentou um método para gerar uma curva suave a partir de um polígono de controle através do recorte recursivo dos cantos do polígono. Este possivelmente foi o primeiro método de construção de curvas suaves de tipo topológico arbitrário. Em CATMULL (1978) e DOO (1978), a idéia foi generali-

zada para superfícies. Em tais esquemas, uma superfície de subdivisão é definida pelo refinamento repetido de uma malha inicial M^0 , produzindo uma seqüência de malhas M^1, M^2, \dots que converge para uma superfície limite.

O esquema de LOOP (1987) é provavelmente o método de subdivisão mais simples para malhas triangulares. Cada aresta da malha é dividida em duas, e dois novos vértices são novamente conectados para formar quatro novos triângulos. Vértices são rearranjados para formar a malha final. A figura 1 ilustra este procedimento de subdivisão.

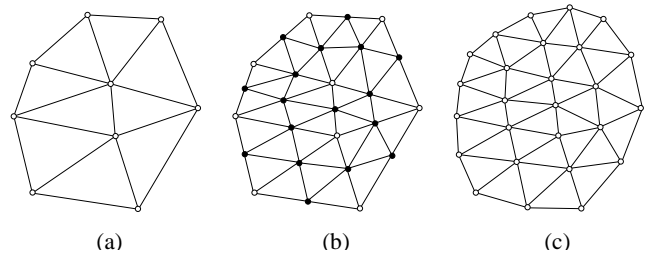


Figura 1 - Esquema de subdivisão de Loop. (a) malha inicial; (b) malha criada pelo passo de subdivisão (vértices novos são representados pelos pontos pretos); (c) malha final criada após reposicionamento de vértices.

O esquema *Butterfly*, proposto por DYN (1990), é uma técnica de subdivisão que recursivamente divide cada face triangular do polígono de controle em quatro faces triangulares interpolando os pontos de controle existentes. Similar a outros esquemas de interpolação, o passo de subdivisão retém os vértices existentes e divide cada segmento de aresta em seu ponto médio. Uma modificação do esquema *Butterfly* foi proposto por ZORIN (1996), garantindo a construção de superfícies contínuas C^1 para malhas arbitrárias.

O primeiro passo de nosso método é gerar uma aproximação linear da superfície através da criação de elementos triangulares nos pontos de dados. O algoritmo inicia com uma triangulação que cobre a fronteira do domínio e, iterativamente, adiciona novos pontos do conjunto de dados até que uma determinada tolerância de erro seja obtida. A superfície resultante é formada por elementos triangulares contínuos C^0 .

Uma vez que uma triangulação inicial tenha sido obtida, superfícies suaves podem ser construídas sobre a malha triangular utilizando-se elementos polinomiais. Nosso método de interpolação utiliza polinômios quadráticos para construir superfícies C^1 , o qual é baseado em um esquema originalmente descrito em POWELL (1977), e posteriormente implementado em CENDES (1987). O método divide cada triângulo em subtriângulos e gera uma função de aproximação sobre cada subtriângulo. Certas condições de continuidade devem ser satisfeitas em cada fronteira entre dois elementos de modo a garantir que a superfície to-

tal seja suave. Desde que o método requer apenas valores de elevação e de derivadas nos vértices da triangulação, tal abordagem é relativamente simples de implementar.

Antes de descrever o método de interpolação, alguns fundamentos matemáticos devem ser apresentados.

2.1 Fundamentos Matemáticos

O uso de coordenadas baricêntricas é uma maneira natural de representar elementos triangulares, desde que isto garante uma influência simétrica entre todos os três vértices do triângulo. Seja T um triângulo planar definido pelos vértices V_1, V_2, V_3 . Qualquer ponto V em T pode ser expresso em termos das coordenadas baricêntricas (r, s, t) definidas por $V = rV_1 + sV_2 + tV_3$, onde $r + s + t = 1$ e $0 \leq r, s, t \leq 1$.

Polinômios de *Bernstein* de grau n sobre um triângulo T podem ser definidos em termos de coordenadas baricêntricas (r, s, t) como

$$B_{i,j,k}^n(r, s, t) = \frac{n!}{i! j! k!} r^i s^j t^k \quad (1)$$

os quais formam uma base para todos os polinômios com duas variáveis de grau n .

A equação paramétrica para um único elemento triangular de *Bernstein-Bézier* é

$$\mathbf{p}(r, s, t) = \sum_{\substack{i+j+k=n \\ i,j,k \geq 0}} \mathbf{b}_{i,j,k} B_{i,j,k}^n(r, s, t) \quad (2)$$

onde os coeficientes $\mathbf{b}_{i,j,k}$ são chamados de pontos de controle de Bézier de $\mathbf{p}(r, s, t)$.

Para $n = 2$, a equação 2 resulta

$$\mathbf{p}(r, s, t) = r^2 \mathbf{b}_{2,0,0} + s^2 \mathbf{b}_{0,2,0} + t^2 \mathbf{b}_{0,0,2} + 2rs \mathbf{b}_{1,1,0} + 2rt \mathbf{b}_{1,0,1} + 2st \mathbf{b}_{0,1,1} \quad (3)$$

A figura 2 mostra um elemento triangular e seus polinômios de *Bernstein* correspondentes.

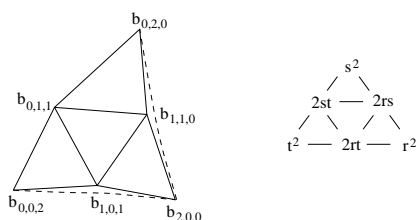


Figura 2 - Elemento triangular de *Bernstein-Bézier* e seus polinômios de *Bernstein* correspondentes.

Em FARIN (1992), é fornecida uma clara descrição das condições de continuidade das derivadas na fronteira comum entre dois elementos triangulares adjacentes. Para garantir continuidade C^1 , as derivadas de primeira ordem

dos dois elementos adjacentes \mathbf{p} e \mathbf{q} devem estar unidas continuamente através da aresta comum.

Nosso método de interpolação calcula os coeficientes do polinômio para cada triângulo com base apenas nos valores de elevação e nos valores estimados das primeiras derivadas parciais (vetores tangentes) nos três vértices do triângulo. A derivada em um vértice é calculada como a média ponderada das tangentes dos triângulos adjacentes ao vértice em questão.

Dado um ponto (x_i, y_i) , os n triângulos adjacentes a este vértice são encontrados. Então, o produto vetorial de qualquer par de lados de cada triângulo é calculado. Este vetor tridimensional é perpendicular ao triângulo, e seu comprimento é duas vezes a área do triângulo. Por exemplo, o produto vetorial (x_p, y_p, z_p) para um triângulo definido pelos pontos $P_1(x_1, y_1, z_1)$, $P_2(x_2, y_2, z_2)$ e $P_3(x_3, y_3, z_3)$ é dado por

$$x_p = (y_2 - y_1)(z_3 - z_1) - (y_3 - y_1)(z_2 - z_1) \quad (4)$$

$$y_p = (z_2 - z_1)(x_3 - x_1) - (z_3 - z_1)(x_2 - x_1) \quad (5)$$

$$z_p = (x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1) \quad (6)$$

Desde que os vértices do triângulo são ordenados no sentido anti-horário em nossa implementação, os valores z_p são sempre positivos. Isto concorda com o fato de que estes valores representam uma componente altura.

Para estimar a derivada a cada ponto, os produtos vetoriais são acumulados para todos os triângulo envolvendo o ponto, e a média das normais resultantes nos vértices é calculada. O plano do gradiente estimado pode ser considerado como uma média espacial das inclinações e tamanhos dos triângulos adjacentes.

2.2 Interpolador Quadrático

O esquema de POWELL (1977) subdivide cada elemento triangular em seis subtriângulo para gerar as superfícies suaves, como mostrado na figura 3. Os pontos P_2, P_4 e P_6 são os vértices do triângulo. O ponto P_0 é o centro do triângulo e os pontos Q_0, Q_1 e Q_2 são os centros dos triângulos adjacentes. Os seis subtriângulos são formados pela conexão do ponto P_0 com os três pontos Q_i . Triângulos na borda do domínio são subdivididos em seis adicionando-se um ponto em uma posição arbitrária ao longo de cada borda do triângulo. Em nosso algoritmo, utiliza-se o ponto médio da aresta na fronteira da malha.

A interpolação requer apenas valores da função e das derivadas em cada vértice de dados. A superfície quadrática é calculada para cada subtriângulo avaliando-se os seis pontos de controle e as coordenadas baricêntricas relativas ao subtriângulo. Então, para cada subtriângulo $P_0P_3P_4$, a superfície quadrática C^1 pode ser representada como

$$\mathbf{p}(r, s, t) = r^2 \mathbf{b}_0 + s^2 \mathbf{b}_3 + t^2 \mathbf{b}_4 + 2rs \mathbf{b}_{15} + 2rt \mathbf{b}_{16} + 2st \mathbf{b}_9 \quad (7)$$

onde (r, s, t) são as coordenadas baricêntricas de um ponto (x, y) no subtriângulo e os seis coeficientes denotam os valores de dados nos pontos de controle.

De modo a satisfazer as condições de coplanaridade no esquema de triângulos de Bézier, é necessário especificar valores de elevação e derivadas nos 19 pontos de controle. Os valores dos vértices em P_2, P_4 e P_6 já são conhecidos. Os valores das derivadas nos vértices, denotados como z_i^x e $z_i^y, i = 2, 4, 6$, são estimados pelo uso da técnica acima.

Cada um dos seis subtriângulos i na figura 3 é convenientemente identificado pelos índices dos pontos de controle dados por $0, 12 + i, 13 + i \pmod 6, i, 6 + i$ e $1 + i \pmod 6$, onde $1 \leq i \leq 6$.

Os 19 pontos de controle de Bézier $b_i, 0 \leq i \leq 18$, são definidos como

$$b_0 = r b_{14} + s b_{16} + t b_{18} \quad (8)$$

$$b_1 = \beta b_{12} + (1 - \beta) b_7 \quad (9)$$

$$b_2 = z_2 \quad (10)$$

$$b_3 = \gamma b_8 + (1 - \gamma) b_9 \quad (11)$$

$$b_4 = z_4 \quad (12)$$

$$b_5 = \alpha b_{10} + (1 - \alpha) b_{11} \quad (13)$$

$$b_6 = z_6 \quad (14)$$

$$b_7 = b_2 + c_3 z_1^x + d_3 z_1^y \quad (15)$$

$$b_8 = b_2 + c_4 z_1^x + d_4 z_1^y \quad (16)$$

$$b_9 = b_4 + c_5 z_2^x + d_5 z_2^y \quad (17)$$

$$b_{10} = b_4 + c_6 z_2^x + d_6 z_2^y \quad (18)$$

$$b_{11} = b_6 + c_7 z_3^x + d_7 z_3^y \quad (19)$$

$$b_{12} = b_6 + c_8 z_3^x + d_8 z_3^y \quad (20)$$

$$b_{13} = \beta b_{18} + (1 - \beta) b_{14} \quad (21)$$

$$b_{14} = b_2 + c_0 z_1^x + d_0 z_1^y \quad (22)$$

$$b_{15} = \gamma b_{14} + (1 - \gamma) b_{16} \quad (23)$$

$$b_{16} = b_4 + c_1 z_2^x + d_1 z_2^y \quad (24)$$

$$b_{17} = \alpha b_{16} + (1 - \alpha) b_{18} \quad (25)$$

$$b_{18} = b_6 + c_2 z_3^x + d_2 z_3^y \quad (26)$$

onde os coeficientes $c_i, 0 \leq i \leq 8$, são definidos como

$$c_0 = \frac{1}{2}(x_0 - x_2) \quad c_1 = \frac{1}{2}(x_0 - x_4)$$

$$c_2 = \frac{1}{2}(x_0 - x_6) \quad c_3 = \frac{\beta}{2}(x_6 - x_2)$$

$$c_4 = \frac{1 - \gamma}{2}(x_4 - x_2) \quad c_5 = \frac{\gamma}{2}(x_2 - x_4)$$

$$c_6 = \frac{1 - \alpha}{2}(x_6 - x_4) \quad c_7 = \frac{\alpha}{2}(x_4 - x_6)$$

$$c_8 = \frac{1 - \beta}{2}(x_2 - x_6)$$

Os coeficientes $d_i, 0 \leq i \leq 8$, são definidos similarmente pela substituição de y_j for x_j nas equações acima. Finalmente, α, β e γ representam as razões de distância

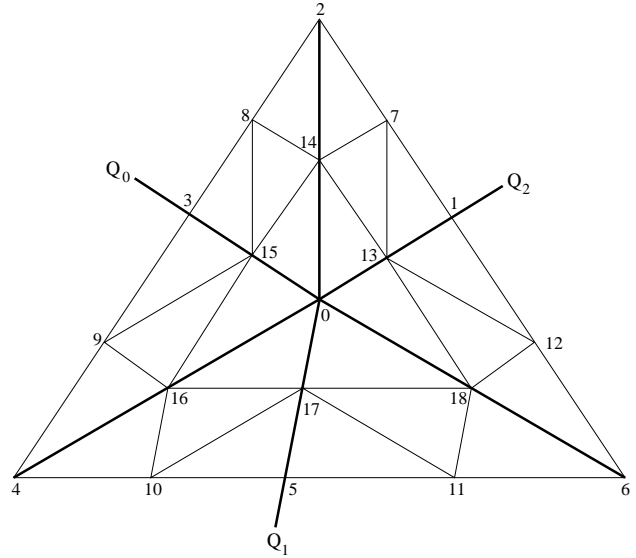


Figura 3 - Subdivisão de Powell-Sabin.

definidas como

$$\alpha = \frac{\overline{P_6 P_5}}{\overline{P_6 P_4}} \quad \beta = \frac{\overline{P_2 P_1}}{\overline{P_2 P_6}} \quad \gamma = \frac{\overline{P_4 P_3}}{\overline{P_4 P_2}} \quad (27)$$

onde $\overline{P_i P_j}$ é a distância entre os nós i e j .

2.3 Interpolador Cúbico

O esquema de interpolação de CLOUGH (1965), originalmente desenvolvido como uma técnica para análise de elementos finitos, foi utilizado para produzir uma superfície polinomial cúbica sobre a triangulação. Para esta construção, cada triângulo é subdividido no centróide em três subtriângulos, e um polinômio cúbico de *Bernstein-Bézier* é definido sobre cada subtriângulo. A figura 4 ilustra o esquema de interpolação de *Clough-Tocher*.

De uma maneira similar à interpolação quadrática, os valores de elevação e das derivadas nos vértices do triângulo são requeridos para garantir continuidade C^1 . Nosso método de interpolação é baseado no trabalho desenvolvido em QUAK (1990), o qual fornece uma construção tal que a continuidade das derivadas é satisfeita em cada aresta comum entre os triângulos.

Inicialmente, as derivadas em cada vértices de dados são calculadas estimando-se o produto vetorial das tangentes para cada triângulo adjacente. A média das derivadas resultantes nos vértices é calculada. Então, os três elementos triangulares cúbicos de Bézier são construídos sobre cada subtriângulo. Um elemento cúbico de Bézier é definido por 10 pontos de controle, como mostrado na figura 2(b). Os 10 pontos de controle de cada subtriângulo fornecem os graus

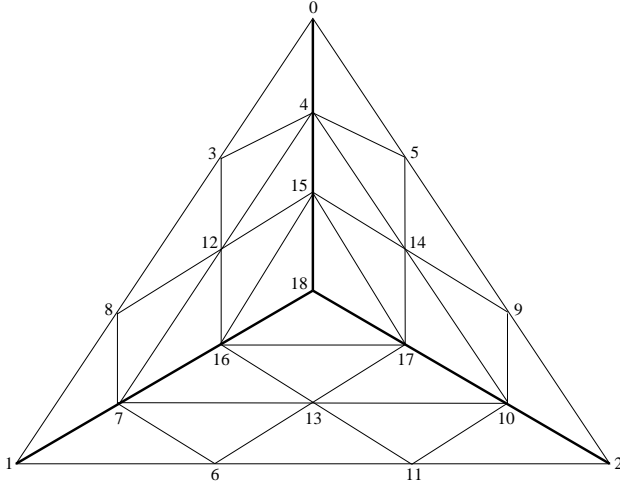


Figura 4 - Subdivisão de Clough-Tocher.

de liberdade requeridos para garantir continuidade ao longo das fronteiras entre os elementos.

Os 19 coeficientes de *Bernstein-Bézier* são dados pelas seguintes equações

$$\begin{aligned}
 b_1 &= z_1 \\
 b_2 &= z_2 \\
 b_3 &= z_3 \\
 b_4 &= ((x_2 - x_1)z_1^x + (y_2 - y_1)z_1^y)/3 + z_1 \\
 b_5 &= ((x_4 - x_1)z_1^x + (y_4 - y_1)z_1^y)/3 + z_1 \\
 b_6 &= ((x_3 - x_1)z_1^x + (y_3 - y_1)z_1^y)/3 + z_1 \\
 b_7 &= ((x_3 - x_2)z_2^x + (y_3 - y_2)z_2^y)/3 + z_2 \\
 b_8 &= ((x_4 - x_3)z_2^x + (y_4 - y_2)z_2^y)/3 + z_2 \\
 b_9 &= ((x_1 - x_2)z_2^x + (y_1 - y_2)z_2^y)/3 + z_2 \\
 b_{10} &= ((x_1 - x_3)z_3^x + (y_1 - y_3)z_3^y)/3 + z_3 \\
 b_{11} &= ((x_4 - x_3)z_3^x + (y_4 - y_3)z_3^y)/3 + z_3 \\
 b_{12} &= ((x_2 - x_3)z_3^x + (y_2 - y_3)z_3^y)/3 + z_3 \\
 b_{13} &= (b_5 + b_8 + (\theta_1 - 1)b_1 + (2 - 3\theta_1)b_4 + \\
 &\quad + (3\theta_1 - 1)b_9 - \theta_1 b_2)/2 \\
 b_{14} &= (b_8 + b_{11} + (\theta_2 - 1)b_2 + (2 - 3\theta_2)b_7 + \\
 &\quad + (3\theta_2 - 1)b_{12} - \theta_2 b_3)/2 \\
 b_{15} &= (b_{11} + b_5 + (\theta_3 - 1)b_3 + (2 - 3\theta_3)b_{10} + \\
 &\quad + (3\theta_3 - 1)b_6 - \theta_3 b_1)/2 \\
 b_{16} &= (b_{15} + b_5 + b_{13})/3 \\
 b_{17} &= (b_{13} + b_8 + b_{14})/3 \\
 b_{18} &= (b_{14} + b_{11} + b_{15})/3 \\
 b_{19} &= (b_{18} + b_{16} + b_{17})/3
 \end{aligned}$$

onde

$$\theta_1 = \frac{(x_4 - x_1)(x_2 - x_1) + (y_4 - y_1)(y_2 - y_1)}{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \quad (28)$$

$$\theta_2 = \frac{(x_4 - x_2)(x_3 - x_2) + (y_4 - y_2)(y_3 - y_2)}{(x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2} \quad (29)$$

$$\theta_3 = \frac{(x_4 - x_3)(x_1 - x_3) + (y_4 - y_3)(y_1 - y_3)}{(x_1 - x_3)^2 + (y_1 - y_3)^2} \quad (30)$$

A representação de *Bernstein-Bézier* com respeito ao subtriângulo $P_0P_1P_{18}$ é

$$\begin{aligned}
 \mathbf{p}(r, s, t) &= r^3 \mathbf{b}_{18} + s^3 \mathbf{b}_0 + t^3 \mathbf{b}_1 + 3r^2s \mathbf{b}_{15} + \\
 &\quad + 3r^2t \mathbf{b}_6 + 3rs^2 \mathbf{b}_4 + 3s^2t \mathbf{b}_3 + 3rt^2 \mathbf{b}_7 + \\
 &\quad + 3st^2 \mathbf{b}_8 + 6rst \mathbf{b}_{12}
 \end{aligned} \quad (31)$$

onde (r, s, t) são as coordenadas baricêntricas de um ponto (x, y) relativo ao subtriângulo. As superfícies cúbicas C^1 para os subtriângulos $P_1P_2P_{18}$ e $P_0P_2P_{18}$ são calculadas de maneira análoga.

3 RESULTADOS EXPERIMENTAIS

Várias amostras de terrenos foram utilizadas para avaliar o desempenho de nosso método. Os algoritmos, implementados em linguagem C++, foram executados em um microcomputador Pentium III com 866 MHz e 1 Gbyte de RAM.

O método de interpolação linear é baseado em um algoritmo de triangulação de Delaunay descrito em PEDRINI (2001). Os métodos quadrático e cúbico são baseados nos esquemas subdivisão de Powell-Sabin e Clough-Tocher, respectivamente, descritos anteriormente.

As figuras 5 e 6 apresentam duas amostras de imagens obtidas pela aplicação de nosso método linear, quadrático e cúbico. Para a primeira amostra, a triangulação utilizou 1.000 vértices, enquanto a segunda utilizou 9.000 vértices.

A tabela 1 mostra o erro quadrático médio (RMSE) e o erro máximo para cada amostra de terreno reconstruída através dos métodos de interpolação, com relação ao modelo de terreno original. Além desta métrica, foi utilizada a informação de intervisibilidade entre pontos (NASCIMENTO (2001)), a qual é uma medida que leva em conta as características topográficas do terreno (tabela 2).

4 CONCLUSÕES

Este artigo descreve um método para construir superfícies suaves a partir de amostras de dados de terrenos. A superfície resultante sobre a malha triangular é representada através de elementos polinomiais contínuos apresentando continuidade C^1 . Um algoritmo de triangulação de Delaunay é utilizado para produzir uma malha inicial, a qual é refinada até que uma determinada tolerância de

erro seja obtida. Uma vez que esta triangulação inicial tenha sido gerada, superfícies suaves são construídas sobre a malha triangular utilizando-se elementos polinomiais quadráticos e cúbicos.

Resultados experimentais têm demonstrado que nossa técnica é eficiente para a modelagem de grandes volumes de dados de terrenos, produzindo aproximações de alta qualidade.

REFERÊNCIAS

CATMULL, E. Recursively generated B-spline surfaces on arbitrary topological meshes. **Computer-Aided Design**, [S.l.], v.10, n.6, p.350–355, Novembro, 1978.

CENDES, Z. J. C^1 quadratic interpolation over arbitrary point sets. **IEEE Computer Graphics and Applications**, [S.l.], v.7, n.11, p.8–16, Novembro, 1987.

CHAIKIN, G. M. An algorithm for high-speed curve generation. **Computer Graphics and Image Processing**, [S.l.], v.3, n.4, p.346–349, Dezembro, 1974.

CLOUGH, R. Finite element stiffness matrices for analysis of plates in bending. In: PROCEEDINGS OF CONFERENCE ON MATRIX METHODS IN STRUCTURAL ANALYSIS, 1965. **Proceedings...** USA:[s.n.], 1965.

DOO, D. Behaviour of recursive division surfaces near extraordinary points. **Computer-Aided Design**, [S.l.], v.10, n.6, p.356–360, Novembro, 1978.

DYN, N.; LEVIN, D. A Butterfly subdivision scheme for surface interpolation with tension control. **ACM Transactions on Graphics**, [S.l.], v.9, n.2, p.160–169, Abril, 1990.

FARIN, G. **Curves and Surfaces for Computer-Aided Geometric Design - A Practical Guide**. Academic Press, Inc, 1992.

FORSEY, D. R. Surface fitting with hierarchical splines. **ACM Transactions on Graphics**, [S.l.], v.14, n.2, p.134–161, Abril, 1995.

LAWSON, C. L. Software for C^1 surface interpolation. In: Rice, J. R., editor, MATHEMATICAL SOFTWARE III, p.161–194. Academic Press, New York, 1977.

LOOP, C. Smooth subdivision surfaces based on triangles. University of Utah, Department of Mathematics, 1987. Dissertação de Mestrado.

DO NASCIMENTO, J. P. R.; SCHWARTZ, W. R. Um método eficiente para determinação de intervisibilidade em terrenos. In: 20TH BRAZILIAN CARTOGRAPHY CONGRESS, 2001. **Proceedings...** Porto Alegre-RS, Brazil:[s.n.], 2001. p.1–5.

PEDRINI, H. An improved refinement and decimation method for adaptive terrain surface approximation. In: PROCEEDINGS OF THE 9TH INTERNATIONAL CONFERENCE IN CENTRAL EUROPE ON COMPUTER GRAPHICS, VISUALIZATION AND COMPUTER VISION, 2001. **Proceedings...** Plzen, Czech Republic:[s.n.], 2001. p.103–109.

POWELL, M. J. D. Piecewise quadratic approximations on triangles. **ACM Transactions on Mathematical Software**, [S.l.], v.3, n.4, p.316–325, Dezembro, 1977.

QUAK, E. Cubic spline fitting using data dependent triangulations. **Computer-Aided Geometric Design**, [S.l.], v.7, n.1–4, p.293–301, Junho, 1990.

ZORIN, D.; SCHRÖDER, P. Interpolating subdivision for meshes with arbitrary topology. In: SIGGRAPH'96 CONFERENCE PROCEEDINGS, 1996. **Proceedings...** New Orleans, Louisiana, USA:[s.n.], 1996. Annual Conference Series, p.189–192.

Tabela 1 - Medidas de erro para cada método de aproximação com relação ao modelo original de terreno.

Terreno	Linear		Quadrática		Cúbica	
	RMSE	Erro Máximo	RMSE	Erro Máximo	RMSE	Erro Máximo
cape-flattery-e.pgm	20.5208	84.00	25.1233	164.00	24.2817	203.00
crater.pgm	1.7966	6.00	2.3519	15.00	2.6788	20.00
emory-peak-e.pgm	22.2941	75.00	26.5350	143.00	26.4798	153.00
klamath-falls-e.pgm	14.5215	61.00	17.5835	108.00	17.3272	110.00
lake-champlain-w.pgm	10.0820	33.00	12.2836	72.00	12.3874	85.00
louisville-w.pgm	7.6514	25.00	8.8656	35.00	8.6490	58.00
mart.e.pgm	8.3630	30.00	11.0785	86.00	11.6191	113.00
presque-isle-w.pgm	8.3716	27.00	10.3248	54.00	9.9849	51.00
rice-lake-e.pgm	2.9941	10.00	3.8431	14.00	3.7317	17.00
roseburg-e.pgm	33.1878	111.00	42.1969	290.00	40.6852	269.00

Tabela 2 - Medidas de erro entre os mapas de intervilidade para cada método de aproximação.

Terreno	Linear		Quadrática		Cúbica	
	RMSE	Erro Máximo	RMSE	Erro Máximo	RMSE	Erro Máximo
cape-flattery-e.pgm	129.6980	839.00	107.3548	822.00	132.7971	755.00
crater.pgm	13.3634	379.00	16.6466	429.00	19.8418	423.00
emory-peak-e.pgm	179.2256	869.00	176.9105	863.00	172.0885	871.00
klamath-falls-e.pgm	81.9755	759.00	79.4805	777.00	87.2355	757.00
lake-champlain-w.pgm	199.6507	879.00	213.0552	839.00	211.5036	795.00
louisville-w.pgm	174.2534	854.00	171.2804	855.00	172.4640	854.00
mart.e.pgm	24.1687	541.00	27.1310	577.00	43.3434	553.00
presque-isle-w.pgm	139.5471	836.00	133.7093	809.00	136.0077	804.00
rice-lake-e.pgm	79.9048	844.00	80.4584	847.00	86.5228	845.00
roseburg-e.pgm	141.2149	802.00	130.5082	812.00	126.0726	744.00

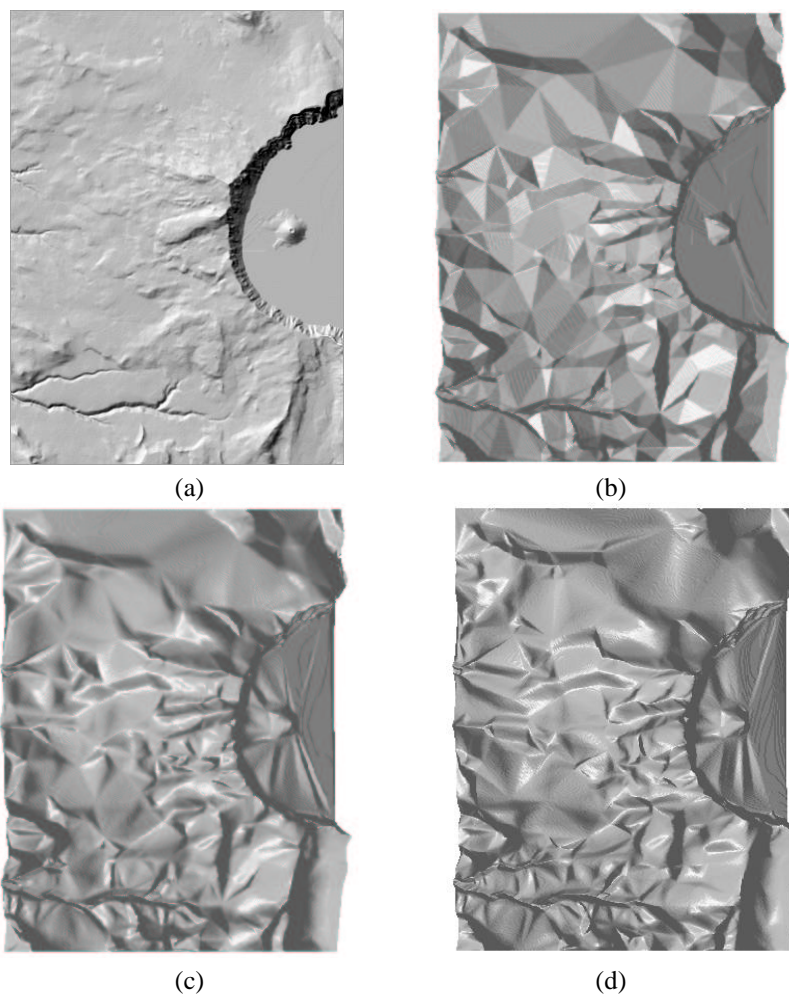


Figura 5 - Aproximações do USGS DEM Crater Lake; (a) terreno original; (b) aproximação linear; (c) aproximação quadrática; (d) aproximação cúbica.

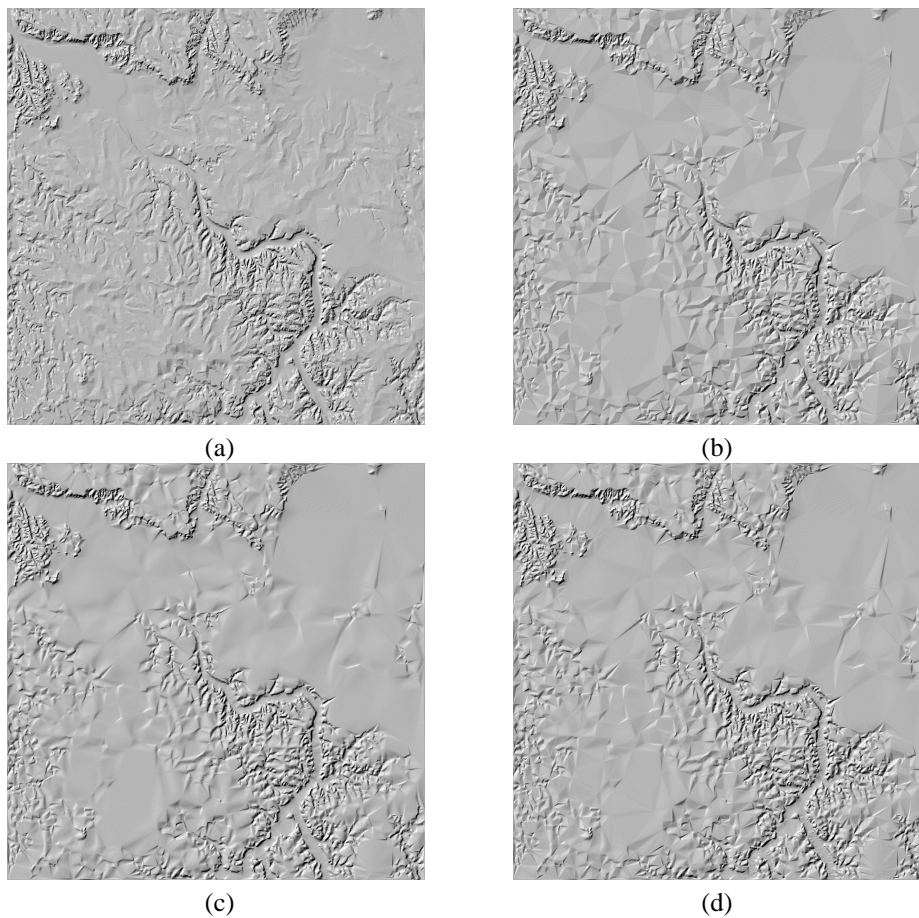


Figura 6 - Aproximações do USGS DEM Louisville; (a) terreno original; (b) aproximação linear; (c) aproximação quadrática; (d) aproximação cúbica.